

# Was zählt bei den Zahlen?

*In dieser pädagogischen Übung bringt Bruce Director Licht in das Dunkel der Zahlentheorie, die in der Schule wohl zu dem Langweiligsten gehört, mit dem die Schüler gequält werden. Begriffe wie Modulus, Kongruenz, gerade und ungerade Zahlen, Quadratzahlen usw. werden plötzlich zum Ausgangspunkt begeisterter eigener Forschungsarbeit, wenn man sie in ihrer realen Entstehungsgeschichte betrachtet.*

Die meisten von uns denken bei ganzen Zahlen, wahrscheinlich in Erinnerung an die Kindheit, an das Abzählen von Gegenständen. Die Zahlenfolge 1, 2, 3, ... bis zu irgendeiner noch vorstellbaren großen Zahl erscheint so als die natürliche Ordnung der Dinge, und deshalb heißen diese Zahlen auch „natürliche Zahlen“. Aber wie der Apostel Paulus in dem oft zitierten ersten Brief an die Korinther, Kapitel 13, sagt: „Als ich ein Kind war, da redete ich wie ein Kind und dachte wie ein Kind und urteilte wie ein Kind; als ich aber ein Mann wurde, tat ich ab, was kindlich war.“ Und Platon lehrt in seinem Buch *Vom Staate*, daß Krieger, die gereifte Staatenlenker werden wollen, lernen müßten, „die Natur der Zahlen nur mit dem Geist zu sehen“. Auf den folgenden Seiten wollen wir uns daher überlegen, was die eigentliche „Natur der Zahlen“, im Unterschied zu den „natürlichen Zahlen, ist.

Die ganzen Zahlen mit dem Abzählen von Gegenständen zu verknüpfen, erscheint sinnvoll, solange es sich um kleine Zahlen handelt; doch wenn wir an größere Zahlen denken, wird dieses Verfahren immer unsinniger. Dann denkt man nicht mehr in einzelnen Zahlen, sondern ordnet diese gruppenweise, beispielsweise in Zehnergruppen. Und wenn wir es recht bedenken, dann ist dies auch bei kleinen Zahlen der Fall. Dadurch setzt sich mehr und mehr die Erkenntnis durch, daß die Vorstellung des Ab-

zählens, obwohl sie anfangs sinnvoll erschien, falsch ist. In seinen Mutmaßungen (*De conjecturis*) behandelt Nikolaus von Kues die „natürliche Reihung“ der Zahlen so:

„Du mußt um so genauer die Natur der Zahl betrachten, je tiefer du das übrige nach ihrem Abbild zu erforschen versuchst. Zuerst aber befaße dich mit ihrer Reihung, und du wirst bestätigen, daß sie durch die Vierzahl abgeschlossen wird. Wenn man nämlich 1, 2, 3 und 4 addiert, so ergibt sich die Zahl 10; diese faltet die zahlenmäßige Kraft der einfachen Einheit aus. Von dieser Zahl 10 her nun, die die zweite Einheit ist, wird durch einen gleichen Viererschritt die quadratische Ausfaltung der Wurzel erreicht; denn  $10 + 20 + 30 + 40 = 100 = 10^2$ . Ebenso ergibt die Hundert als Einheit durch die gleiche Bewegung die Tausend; denn  $100 + 200 + 300 + 400 = 1000$ . Doch läßt sich auf diesem Weg nicht weiter fortschreiten, als ob noch etwas übrig sei... Und jenseits des Tausenders, des Würfels der Zehn, gibt es keine Abwandlung bei der Wiederholung. Da dieser Tausender durch die dreimal wiederholte Viererreihe nach der Zehnerordnung entsteht, ergibt sich, daß die Vierzahl, die Ausfaltung der Einheit, die Macht für jede Zahl enthält.“ (*Mutmaßungen*, 1. Teil, 3. Kap.)

Wir kommen der „Natur“ der Zahlen näher, wenn wir an große Zahlen denken, etwa wieviel Jahre die Präzession der Erdachse in Anspruch nimmt. (Die Erde „eiert“ bei ihrer Drehung um die eigene Achse. Wie bei einem sich langsam drehenden Kreisel wandert die Erdachse um die Ebene der Erd- und Mondbahn. Dadurch verschiebt sich, von der Erde aus gesehen, der Himmelspol, und bei der Tag- und Nachtgleiche zum Frühlings- und Herbstanfang geht die Sonne nach ein paar tausend Jahren in einem anderen Tierkreiszeichen auf.) Ein solcher Zyklus, bei dem die Erdachse einen Kegelmantel um die Senkrechte zur Erdbahn beschreibt, dauert fast 26 000 Jahre. Wir nehmen hier also den Zyklus einer Erdumdrehung um die Sonne (Jahr) als Maß für den Zyklus der Richtungsänderung der Erdachse in bezug auf die Sterne. Beide Zyklen werden nur mit dem Geist gesehen, denn mit den Augen sehen wir nur die veränderte Position der Sonne am Himmel im Vergleich zu den veränderten Positionen der Sterne. Wir sehen niemals die wirkliche Bewegung der Erde um die

Sonne oder die kegelförmige Rotation der Erdachse. Aber wenn wir in unserem Geist diese beiden gedanklichen Vorstellungen einander gegenüberstellen, kommen wir auf die Zahl 26 000. Kein Mensch käme je durch Abzählen auf diese Zahl. Sie entsteht ausschließlich durch die Erzeugung eines geistigen Bildes, einer Metapher, die aus der Gegenüberstellung von zwei verschiedenen Ideen über bestimmte physikalische Vorgänge erwächst.

Alle erdenklichen Zahlen sind mit solchen Metaphern verbunden. Keine wird jeweils an sich gedacht, sondern nur bezogen auf eine zugrundeliegende Metapher, selbst wenn diese nicht immer offensichtlich ist. Um die tieferen Implikationen dieser Feststellung zu entdecken, sollten wir einige Experimente machen und uns dabei von Carl Friedrich Gauß' *Disquisitiones arithmeticae* anleiten lassen. Zunächst einmal müssen wir jegliche geistige Abhängigkeit von der „natürlichen“ Ordnung der ganzen Zahlen loswerden. (Dies ist leichter gesagt als getan, denn diese kindliche Denkweise – die aber gar nicht von Kindern stammt – ist tief in unseren axiomatischen Denkanahmen verankert.) Statt dessen sollte man von Zahlen sprechen, wie sie von Gauß' Begriff der *Kongruenz* oder *Übereinstimmung* nahegelegt werden.

*Wenn die Differenz zweier Zahlen durch eine dritte Zahl teilbar ist, dann sagt man: Sie sind bezüglich dieser dritten Zahl kongruent.* Die beiden Zahlen werden als Reste voneinander bezeichnet, und die dritte Zahl heißt *Modulus*.

Klingt das nicht einfach? Versuchen Sie es selbst anhand von Beispielen. Hier ist eines für den Anfang: 13 und 138 sind kongruent bezüglich Modulus 5, aber nicht kongruent bezüglich Modulus 11. -9 und +19 sind kongruent bezüglich Modulus 7.

Nach diesem Begriff der Kongruenz definiert die Beziehung zwischen drei Zahlen die Beziehung aller Zahlen zueinander. Keine Zahl erklärt sich aus sich selbst, sondern alle beziehen sich aufeinander über die Beziehung des Intervalls zwischen ihnen zum Modulus. Jedes Intervall bestimmt, unter *welchen* Moduli diese Zahlen kongruent oder nicht kongruent sind. Dieser Begriff einer Zahl als ein Gegenüberstellen zweier Ideen, nämlich eines Intervalls und eines Modulus,

spiegelt wahrheitsgetreuer wider, auf welche Weise Zahlen im Kopf entstehen.

Ein einfaches Experiment bringt zutage, wie tief verwurzelt die sogenannte „natürliche Zahlenfolge“ in unserem Denken ist. Man wähle sich eine beliebige Zahl als Modulus  $m$ . Dann schreibe man eine Zahlenfolge auf, die mit irgendeiner beliebigen Zahl  $a$  anfängt:  $a, a+1, a+2, \dots, a+m-1$ . Die Zahlenfolge hat ebenso viele Zahlen, wie der Modulus Einsen enthält. Als nächstes wähle man irgendeine Zahl  $A$ , die nicht in der ersten Folge enthalten ist. Diese Zahl  $A$  wird nur mit einer einzigen Zahl aus der ersten Folge bezüglich Modulus  $m$  kongruent sein. Nun versuche man dasselbe mit  $A+1$ . Mit welcher Zahl ist sie kongruent? Als nächstes teste man  $A+2$  usw., bis man zu  $A+m-1$  gelangt. Und was passiert, wenn man anschließend noch eine 1 zu  $A$  hinzuaddiert? (Siehe *Beispiel 1*).

der Folge nicht um jeweils 1, sondern um 2, 3 oder 4 vergrößert wird.

Einmal nannte mir ein guter Freund, der damals in Baskerville, Virginia, lebte (es handelt sich um einen der fünf politischen Gefangenen der LaRouche-Bewegung in den USA Ende der 90er Jahre), folgendes aus dem Leben gegriffene Beispiel für das Zählen durch Kongruenz bezüglich eines Modulus. Es ist seither als das „Baskerviller Modulus-Problem“ bekannt:

In einem Gefängnis mit drei Gebäuden, in denen sich jeweils zwei Schlafsäle befinden, ist reihum jeweils ein Schlafsaal zuerst mit dem Mittagessen dran. Wenn Schlafsaal A in Gebäude 1 montags zuerst zum Mittagessen geht, wie lange dauert es dann, bis derselbe Schlafsaal wieder montags zuerst mit Essen dran ist?

Wenn Sie das herausbekommen haben,

folge ab: 0, 1, 2, 3, 4, 5, wobei 0 bedeutet, daß man als erste Schicht zum Essen geht, 1 als zweite, usw. Aber das Zählen nach der „natürlichen“ Zahlenfolge und die Realität des Gefängnis-Mittagessens beginnen nach sechs Tagen (0-5) voneinander abzuweichen, denn am siebten Tag essen die Gefangenen der ersten Zellen-Gruppe wieder als erste, was als Tag 0 in der Abfolge der Essensgänge gezählt wird. Am achten Tag ißt die Zellengruppe als zweite, gezählt als Tag 1 in der Ordnung der Essensgänge, usw.

Man denke hierbei an den Gaußschen Begriff der Kongruenz. Am ersten Tag ißt der Gefangene als erster zu Mittag – 0 in der Essenfolge. An Tag 6 ißt der Gefangene wieder als erster – wieder 0 in der Essenfolge. Somit ist zwischen 0 und 6 etwas gleich. Offensichtlich sind sie nicht identisch, aber in bezug auf den Modulus 6 sind sie kongruent, denn das Intervall zwischen 0 und 6 ist durch 6 teilbar. (Gauß führte das Symbol  $\equiv$  ein, um zwischen Kongruenz und Gleichheit zu unterscheiden. „In bezug auf den Modulus“ wird abgekürzt durch „mod“.) Am 12. Tag geht die Zellengruppe des Gefangenen wieder als erste zum Mittagessen. Somit ist 0 mit 6 und 12 bezüglich Modulus 6 kongruent. Und wieder sind auch die Intervalle zwischen 0 und 6, 6 und 12, 0 und 12 sämtlich durch den Modulus 6 teilbar. Entsprechend ißt die Zellengruppe unseres Gefangenen an Tag 7 als zweite (gezählt 1). 7 und 1 sind nicht gleich, aber kongruent bezogen auf den Modulus 6. Diese Kongruenzbeziehung in bezug auf den Modulus 6 ist Ausdruck des spezifischen Ordnungsprinzips im Essensplan des Gefangenen, das vom einfachen linearen Abzählen der Tage nach der „natürlichen Reihung“ der Zahlen abweicht.

Dieser Kongruenzbegriff entspricht Keplers Vorstellung von Kongruenz im ersten Buch seiner *Weltharmonik*. Kepler merkt dort an, das Wort „Kongruenz“ im Lateinischen bedeute das gleiche wie das Wort „Harmonie“ im Griechischen. Beide sind abgeleitet von einem Verb, das im Deutschen „übereinstimmen“ oder „zusammen passen“ heißt. Kepler bezeichnet Vielecke als „kongruent“, die zusammen passen, wenn man sie aneinander legt. Auf einer ebenen Fläche passen beispielsweise Dreiecke, Vierecke und Sechsecke genau zusammen, Fünfecke jedoch nicht. Andererseits können Dreiecke, Vierecke und Fünfecke sehr harmonisch zu Körpern zusammengefügt werden, während das mit Sechsecken nicht geht. Welche Vielecke kongruent

$a, a+1, a+2, \dots, a+m-1$	$m=7$	$a=50$	
$\rightarrow 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, \dots$			
$A=23$			
Bezüglich $m=7$ ist			(Differenz)
23 kongruent mit		51	28
24 kongruent mit		52	28
25 kongruent mit		53	28
$\vdots$			
29 (= $A+m-1$ ) mit		50	21
30 (= $A+m-1$ ) mit		51	21
31 (= $A+m-1$ ) mit		52	21
$\vdots$			

Beispiel 1

Diesen Versuch mache man nun mit verschiedenen Zahlen als Modulus. Trifft es zu, daß Ihr naives Vorstellungsvermögen immer die natürliche Zahlenfolge  $a, a+1, \dots$  als primär denken will und den Begriff der Kongruenz als störend empfindet? Ertappen Sie sich dabei, ärgerlich zu werden, wenn Sie merken, daß der Kongruenzbegriff die einfache, natürliche Ordnung der ganzen Zahlen durcheinander bringt? Wenn in der wirklichen Welt, wie wir weiter oben festgestellt haben, alle Zahlen aus einer Metapher entstehen, warum beharrt Ihr Kopf dann darauf, die scheinbar kindliche Idee der natürlichen Zahlenordnung zu verteidigen?

Wer noch mehr Spaß haben will, mache das Experiment mit anderen Zahlenfolgen, bei denen die Ausgangszahl  $a$  in

lösen Sie auch noch die nächste Aufgabe: Jeden dritten Donnerstag gibt es Grillhähnchen. Aber nur die Leute aus jenem Schlafsaal, der zuerst zum Essen gerufen wird, bekommen das Hähnchen heiß zu essen. Bei allen anderen ist es bereits kalt und schmeckt wie Gummi. Wie oft bekommt Schlafsaal A aus Gebäude 1 heiße Hähnchen?

### Kalte Hähnchen zählen nicht

Im ersten Teil des „Baskerviller Modulus-Problems“ ist unser Gefangener in einen sechstägigen Zyklus eingebunden, der es mit sich bringt, daß seine Zellen-Gruppe alle sechs Tage zuerst zum Mittagessen geht. Man zähle diese Rotation entsprechend der „natürlichen“ Zahlen-

sind und welche nicht, hängt also von dem Bereich ab, in dem die Kongruenz hergestellt wird.

Diese Kongruenzbeziehung in bezug auf den Bereich ist auch in der Situation unseres Gefangenen zu sehen. Die Woche hat sieben Tage, die entsprechend der „natürlichen Zahlenfolge“ als Sonntag = 0, Montag = 1 usw. gezählt werden können. Auch hier weichen „natürliche Zahlenfolge“ und Realität voneinander ab, sobald wir den zweiten Sonntag erreichen, der als Tag 7 gezählt wird (da wir mit 0 und nicht mit 1 zu zählen begannen). Dieser zweite Sonntag ist wieder dem ersten ähnlich, aber nicht gleich, nämlich kongruent: 0 ist kongruent mit 7 in bezug auf Modulus 7.

Die Wochentage sind nach Kongruenzen bezüglich Modulus 7 geordnet, während der Essensplan des Gefangenen Kongruenzen in bezug auf den Modulus 6 folgt. Die Zahlen 0-6 in bezug auf Modulus 7 und 0-5 in bezug auf Modulus 6 nannte Gauß die „kleinsten positiven Reste“ des Modulus, denn sie sind die kleinsten positiven Zahlen, mit denen jede andere Zahl, so groß sie auch sein mag, kongruent ist. Dies probieren Sie am besten selbst aus (Beispiel 2).

Nun wollen wir diese beiden Ordnungsprinzipien zusammenbringen: Den Essensplan des Gefangenen (Modulus 6) mit dem Wochenrhythmus (Modulus 7). Wenn der Gefangene am Montag (Tag 1) in der ersten Schicht isst, wie lange dauert es, bis er wieder an einem Montag als erster zum Essen geht? Arbeitet man dieses Problem wie oben bereits angesprochen durch, stellt man fest, daß unser Gefangener nach 42 Tagen ( $6 \times 7$ ) oder sechs Wochen wieder an einem Montag als erster mit dem Mittagessen dran wäre, und in der Zwischenzeit ginge er an allen übrigen Wochentagen je einmal als erster zum Essen.

Aber wenden wir uns nun dem zweiten Teil des Problems zu: Grillhähnchen gibt es an jedem dritten Donnerstag, und bei allen außer der ersten Essensschicht sind die Hähnchen kalt und gummiartig. Wie oft bekommt unserer Gefangener heiße Hähnchen? Man zähle die Wochen 0, 1, 2, 3 usw. In Woche 0 gibt es am Donnerstag Hähnchen, in Woche 1 und 2 gibt es keine Hähnchen, erst wieder in Woche 3. 3 und 0 sind kongruent bezüglich Modulus 3. Somit gibt es Hähnchen immer an solchen Donnerstagen, die in Wochen fallen, welche mit 0 bezüglich Modulus 3 kongruent sind.

Was bedeutet das für unseren Gefangenen? Da er einmal alle sechs Wochen am

gleichen Wochentag als erster zum Mittagessen geht, ist er also jeden sechsten Donnerstag als erster mit Essen dran, an allen Donnerstagen nämlich, die in Wochen fallen, deren Zahlen in bezug auf Modulus 6 kongruent sind. Das heißt, er bekommt alle sechs Wochen heiße Grillhähnchen, oder? Nicht unbedingt. Wenn er in der glücklichen Lage ist, an einem Donnerstag als erster dran zu sein, wenn es tatsächlich Hähnchen gibt, wird er auch alle sechs Wochen ein heißes Hähnchen bekommen. Aber wenn es an dem Donnerstag, wenn er als erster dran ist, kein Hähnchen gibt, wird er nie ein heißes Hähnchen bekommen. Tatsächlich werden nur zwei Zellengruppen überhaupt jemals heiße Hähnchen essen.

8	≡	2	mod 6
9	≡	3	
10	≡	4	
11	≡	5	
12	≡	0	
13	≡	1	
14	≡	2	
153	≡	3	mod 6
(153 - 3 = 150 = 25 × 6)			
<b>Beispiel 2</b>			
Sind wirklich alle größeren Zahlen mit den Zahlen 0-5 kongruent in bezug auf Modulus 6?			

Was ist mit unseren Zahlen geschehen? Zuerst wich die natürliche Zahlenfolge von der Realität ab, doch wir entdeckten ein wirklichkeitsnäheres Ordnungsprinzip. Aber jetzt scheint wieder eine Abweichung aufzutreten. Es muß ein weiteres Ordnungsprinzip im Spiel sein, dessen wir uns nicht bewußt waren. Schauen wir zurück auf den Unterschied zwischen den zwei Teilen des Problems. Im ersten Teil kombinierten wir zwei Zyklen, einen in bezug auf Modulus 6 und einen in bezug auf Modulus 7. Im zweiten Teil standen beide Zyklen in Beziehung zu den Moduli 3 und 6. Wo liegt der Unterschied?

Ein Weg festzustellen, woher dieses Paradox stammt, ist folgender. Man denke sich 7 Punkte (oder Scheitelpunkte eines Vielecks), die sich grob auf einem Kreis verteilen. Man bezeichne diese Punkte mit 0-6. Nun verbinde man diese Punkte in der Reihenfolge 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0. Dann verbinde man die Punkte, indem man jeden zweiten ausläßt: 0, 2, 4, 6, 1, 3, 5, 0. Dann, indem man jeden dritten ausläßt: 0, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 0. Und so weiter für alle Zahlen 0-6. (Am besten

benutzt man dazu immer verschiedene Kreise mit Punkten, anstatt alle übereinander zu zeichnen. Siehe *Abbildung 1*) Was sind die Unterschiede und Ähnlichkeiten zwischen den so geschaffenen Figuren?

Jetzt verfähre man genauso mit 6 Punkten (*Abbildung 2*).

Man vergleiche diese Anordnungen mit den Sequenzen der kleinsten positiven Reste der Reihen  $a, a+1, a+2 \dots; a, a+2, a+4, a+6 \dots; a, a+3, a+6, a+9 \dots; a, a+4, a+8, a+12 \dots$  usw. in bezug auf die Moduli 6 und 7.

Wenn Sie das *Beispiel 3* selbst zuende geführt oder das Experiment selbständig anhand eigener Reihen mit einem anderen Wert für  $a$  durchgerechnet haben, erscheint das Paradox des „Baskerviller Modulus-Problems“ bereits viel deutlicher. Das Ordnungsprinzip, das wir bisher übersehen haben, ist das Konzept der Primzahlen (siehe auch „Carl Friedrich Gauß: Von den Primzahlen zu den komplexen Zahlen“ in *FUSION 2/2004*, S. 39 ff). Die Zahl der Scheitelpunkte ist ein Modulus, und die ausgelassene Zahl ist ein weiterer Modulus. Wenn man die beiden Moduli zusammenbringt, entsteht ein Vieleck. Falls sich die beiden Moduli wie Primzahlen zueinander verhalten (d.h. keinen gemeinsamen Teiler besitzen), sind alle Punkte miteinander verbunden, und es entsteht ein vollständiges Vieleck. Wenn die Moduli jedoch nicht teilerfremd sind (etwa 3 und 6), wird das Vieleck nicht vollständig, sondern einige Scheitelpunkte bleiben unverbunden. Daraus folgt: Wenn der Modulus der Essensrotation und der Modulus der Hühnenabfolge nicht teilerfremd sind, gibt es keine Garantie, daß unser Gefangener überhaupt jemals in den Genuß eines heißen Hähnchens kommt.

## Wie gut, daß es auch Ungerades gibt!

Der Gegensatz zwischen zwei verschiedenen Zahlenbegriffen bringt unseren Gefangenen auf die Idee, sich auf eine Reise ins Zahlenreich zu begeben, um die Natur der Zahlen zu entdecken, die jenseits der Sinneswahrnehmung liegt.

Er erinnert sich an seine Kinderzeit und stellt fest, daß alles, was man ihm damals über Zahlen beigebracht hat, sich auf eine festgesetzte Anzahl von Regeln und Operationen beschränkte. Zahlen wurden wie Dinge behandelt, und man mußte vorgegebene Anweisungen auf Kommando wiederholen, statt selbst etwas zu entdecken.

Da fallen ihm plötzlich die befreienden Worte des Nikolaus von Kues aus den *Mutmaßungen* ein: „Das Wesen der Zahl ist also das erste Urbild des Geistes ... Sinnbildlich kommen wir so bei unserer Mutmaßung von den rationalen Zahlen unseres Geistes zu den realen unaussagbaren des göttlichen Geistes; denn wir nennen ja die Zahl ‚das erste Urbild der Dinge im Geiste des Schöpfers‘, wie die aus unserer Vernunft hervorgehende Zahl Urbild seiner abbildlichen Welt ist.“ (*De coniecturis*, Ende 2. Kap.)

Allmählich kommen ihm einige glücklichere Erinnerungen in den Sinn, wie er als kleiner Junge einfach alles wissen wollte, alles erkundete, auch die Zahlen, und bei seinen Spielereien verborgene Beziehungen zwischen den Zahlen entdeckte. Das war nichts Großartiges, kleine Kuriositäten, die er für sich behielt. Einmal faßte er sich ein Herz und erzählte seinem Lehrer von einer solchen Entdeckung. Die Reaktion war niederschmetternd. „Sei kein Kauz!“, sagte der Lehrer. „Das hat doch keinerlei praktische Bedeutung. Damit kannst du später im Leben nichts anfangen.“

Heute sind all diese Vorschriften und Lehrsätze, die ihm in jungen Jahren eingetrichtert wurden, untauglich geworden – wenn sie überhaupt je zu etwas nütze waren. Aber jetzt steht es ihm frei, seine Erkundungen fortzusetzen, und er beginnt mit jenen elementaren Prinzipien, die dem Einfältigen einfach vorkommen, die jedoch einen reichen Schatz tiefergründiger Ideen bergen, wenn man den (nur scheinbar spitzfindigen) Paradoxen nachgeht, die dabei auftreten. Er nimmt Papier und Bleistift und stellt eine Zahlenfolge auf, indem er mit einer Einheit beginnt, in der nächsten Zeile eine weitere Einheit hinzufügt, in der dritten Zeile wieder eine, usw. (*Beispiel 4*).

Aus seinem Vorgehen scheint klar hervorzugehen, daß jede Zahl einzigartig ist und sich von allen anderen dadurch unterscheidet, daß jeweils eins hinzugezählt wurde, so wie ein Tag auf den anderen folgt. Aber unser Gefangener will seinen Geist von alten Fesseln befreien und entdecken, was hinter den Zahlen liegt, indem er sie auf einer anderen Ebene betrachtet als der, wo immer bloß eins hinzugefügt wird.

Also macht er folgendes Experiment: Bei jeder Zahl in *Beispiel 4* streicht er vorne und hinten eine Einheit durch. Dabei beginnt er mit der ersten und der letzten Einheit, dann kommt die zweite und die zweitletzte Einheit, und so fort, bis es nicht mehr weitergeht. (Der Leser sollte

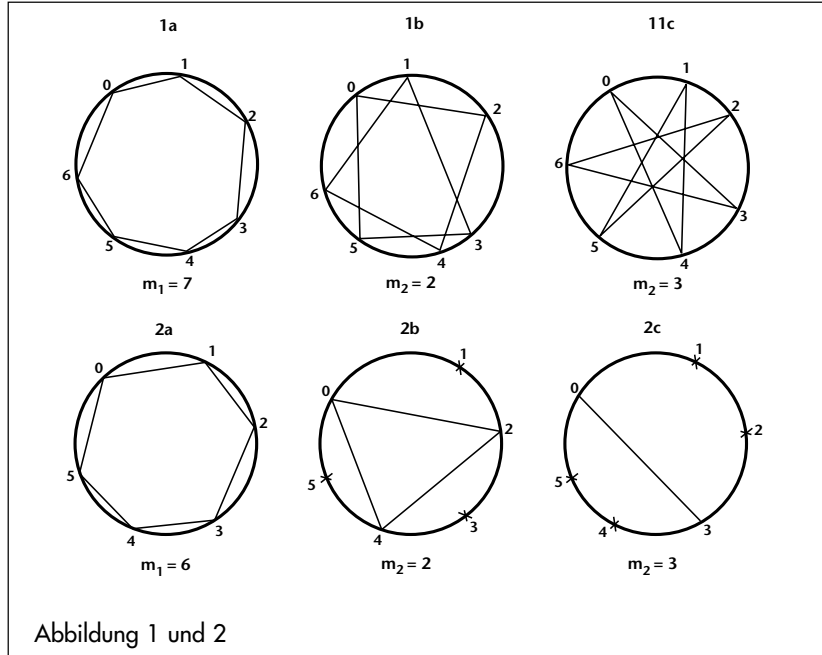


Abbildung 1 und 2

- a)  $a, a + 1, a + 2, \dots \rightarrow 10, 11, 12, 13, \dots$   $a = 10$   
 $10 \equiv 4 \pmod{6}$   
 $11 \equiv 5$   
 $12 \equiv 0$   
 $13 \equiv 1$  Die kleinsten positiven Reste sind 0, 1, 2, 3, 4, 5  
 $14 \equiv 2$  wie in Abb. 2a  
 $15 \equiv 3$   
 $16 \equiv 4$
- b)  $a, a + 2, a + 4, \dots \rightarrow 10, 12, 14, 16, \dots$   
 $10 \equiv 4 \pmod{6}$   
 $12 \equiv 0$   
 $14 \equiv 2$  Die kleinsten positiven Reste sind 0, 2, 4,  
 $16 \equiv 4$  wie in Abb. 2b  
 $18 \equiv 0$
- c)  $a, a + 3, a + 6, \dots \rightarrow 10, 13, 16, 19, \dots$   
 $10 \equiv 4 \pmod{6}$   
 $13 \equiv 1$   
 $16 \equiv 4$  Die kleinsten positiven Reste sind 1, 4,  
 $19 \equiv 1$  ähnlich wie in Abb. 2c

Beispiel 3

hier natürlich wieder selbst zum Stift greifen, siehe *Beispiel 5*.)

Es stellt sich anhand dieser Prozedur heraus, daß Zahlen sich noch durch mehr voneinander unterscheiden, als daß immer eins hinzugezählt worden ist. Denn einige Zahlen, genauer gesagt jede zweite, behält in der Mitte eine nicht durchgestrichene Einheit übrig, während alle anderen Zahlen keine solche Einheit in der Mitte übrig haben.

Und wieder muß er an Nikolaus von Kues' Worte denken:

„Bekanntlich besteht jede Zahl aus der Einheit und der Andersheit, und zwar so, daß die Einheit zur Andersheit fortschreitet und die Andersheit zur Einheit zurückschreitet; so wird die Zahl im wechselseitigen Voranschreiten begrenzt und in ihrem Wesen verwirklicht. Die Einheit einer Zahl kann der Einheit einer anderen nicht völlig gleich sein, da eine genaue Gleichheit in jedem Endlichen unmöglich ist. Einheit und Andersheit werden also in jeder Zahl abgewandelt; offensichtlich hat eine ungerade Zahl

mehr von der Einheit als eine gerade Zahl, weil eine gerade Zahl in zwei gleiche Teile geteilt werden kann, eine ungerade nicht. Wenngleich also jede Zahl aus Einheit und Andersheit eine ist, so gibt es doch Zahlen, bei denen die Einheit über die Andersheit siegt, und andere, bei denen die Andersheit die Einheit verschluckt.“ (*De coniecturis*, 9. Kap.)

Der Gefangene lächelt, denn jetzt erscheint ihm der einst so alltägliche Gedanke der geraden und ungeraden Zahlen, deren Unterscheidung in seiner Jugend als geradezu trivial hingestellt wurde, in neuem Licht. In seine Freude mischt sich auch ein bißchen Ärger, denn er weiß wohl, daß dieses neue Licht überhaupt nicht neu ist, sondern in Wirklichkeit eine antike Entdeckung, die er schon als Junge hätte nachvollziehen sollen. Im Gegensatz zu dem, was man ihm in der Schule beigebracht hatte, handelt es sich bei dem Begriff von *gerade* und *ungerade* nicht um die bloße Beschreibung einer bestimmten Zahl, sondern um etwas, das mit der Natur der Zahlen selbst zusammenhängt. Die in der Schule gelernte Version schien zwar zu funktionieren, aber sein Geist kam dabei zu kurz.

Der Ärger legt sich, als er sich wieder seiner Untersuchung zuwendet. Er überläßt es anderen zu enthüllen, wie es kam, daß diese Entdeckungen des Altertums aus den Lehrplänen gestrichen wurden.

Die Unendlichkeit aller Zahlen ist nun in zwei Hälften geteilt worden, gemäß der Natur der einzelnen Zahlen, wenn man jede von ihnen durch zwei teilt. Das

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	

**Beispiel 4**

z.B.

5	†††††
6	†††††††

**Beispiel 5**

2	1. Teilg. →	2 Teile zu je
4	"	
6	"	
8	"	
10	"	

1		: 2 = gerade - ungerade
2	††	: 4 = gerade - gerade
3	†††	: 6 = gerade - ungerade
4	††††	: 8 = gerade - gerade
5	†††††	: 10 = gerade - ungerade

**Beispiel 6**

entdeckte Prinzip von gerade und ungerade teilt die Unendlichkeit der Zahlen in zwei Typen – solche Zahlen, bei denen „die Andersheit über die Einheit siegt“, und solche, bei denen „die Einheit über die Andersheit siegt“.

Bei der ursprünglichen Herstellung aller Zahlen durch das Hinzufügen von eins war keine Zahl gleich der anderen. Aber jetzt entdeckt er, daß einige Zahlen anderen ähneln, ohne ihnen gleich zu sein. Der Gefangene möchte diese Entdeckung auf einen Begriff bringen, und dies führt ihn zu Gauß' Konzept der *Kongruenz*. Alle Zahlen des gleichen Typs sind miteinander kongruent, mit den Zahlen eines anderen Typs sind sie nicht-kongruent. Es gibt zwei Typen. Also sind nach Gauß alle geraden Zahlen zueinander kongruent in bezug auf den Modulus 2. Ebenso sind alle ungeraden Zahlen zueinander kongruent in bezug auf den Modulus 2. Und alle geraden Zahlen sind nicht-kongruent mit allen ungeraden Zahlen bezüglich Modulus 2.

Als der Gefangene das erkennt, drängt es ihn, die Erkundung fortzusetzen und die Zahlen noch weiter zu unterteilen. Dieses Mal nimmt er sich zunächst nur die geraden Zahlen vor, und zwar nimmt er die Teile, die bereits bei der ersten Zweiteilung durch wiederholtes Abstreichen der jeweils ersten und letzten Einheiten an beiden Enden entstanden waren. Und siehe da, nun unterteilen sich die geraden Zahlen wiederum in zwei Typen: solche, deren Teile, wenn man sie auf diese Weise teilt, in der Mitte keine Einheit zurückbehalten und *gerade-gerade* genannt werden; und dann solche, die bei der gleichen Behandlung eine Einheit übrig behalten und deswegen *gerade-ungerade* heißen (siehe *Beispiel 6*).

Auch die ungeraden Zahlen spalten sich in zwei Typen auf: Solche, die gerade Zahlen auf beiden Seiten der übrig gebliebenen Einheit in der Mitte haben, heißen *ungerade-gerade*, und solche, die ungerade Zahlen auf beiden Seiten der übrig gebliebenen Einheit in der Mitte haben, heißen *ungerade-ungerade*. Damit ist die Zahlenunendlichkeit in vier Teile geteilt worden!

Wieder muß betont werden, daß Zahlen des gleichen Typs nicht gleich sind,

und wir greifen auf die Gaußsche Kongruenz zurück, um diese neue Entdeckung in einen Begriff zu fassen. Jede Zahl jedes dieser vier Typen – gerade-ungerade, gerade-gerade, ungerade-gerade und ungerade-ungerade – ist kongruent mit allen Zahlen des gleichen Typs in bezug auf den Modulus 4.

Aus der Zahlenfolge, die durch Hinzufügen von eins entsteht, geht die neu entdeckte Unterteilung in gerade, ungerade, gerade-ungerade, gerade-gerade, ungerade-gerade und ungerade-ungerade zwar logisch hervor, doch nichts daran versteht sich von selbst. Um von dieser kleinen Unterscheidung zwischen den Zahlen ausgehend in eine andere Domäne als den linearen Bereich des Hinzufügens von eins geistig vorzudringen, muß der Gefangene sich von den Beschränkungen formalen Denkens befreien. Diese Domäne ist nämlich nicht durch Linearität, sondern durch Krümmung gekennzeichnet. Und diese Krümmung ist in den Prinzipien von gerade und ungerade bloß reflektiert. Die Natur dieser Krümmung muß nun weiter erforscht werden, und der Gefangene überlegt bereits, welche Untersuchungen er dabei anstellen will.

## Der Gefangene und das Vieleck

Er ist entschlossen, nicht auf moderne Lehrbücher zurückzugreifen, sondern lieber auf eine abgewetzte Ausgabe der Euklidischen *Elemente*, die immerhin die Überreste einiger Entdeckungen aus dem klassischen Griechenland enthält. Die tiefere Bedeutung dieser Entdeckungen wird in den *Elementen* zwar nicht ausdrücklich angesprochen, läßt sich aber im Geiste rekonstruieren. Er schlägt die Abhandlungen 21-34 in Buch 9 auf, um sich die dort erwähnten Entdeckungen über gerade und ungerade Zahlen zu vergegenwärtigen und sie, wie in einem Dialog, dem höheren Standpunkt von Nikolaus von Kues' *Mutmaßungen* gegenüberzustellen.

Aus der Sicht des Cusaners läßt sich das bei Euklid erwähnte Prinzip folgendermaßen ausdrücken: Wenn zwei gerade Zahlen addiert werden, siegt die Andersheit nach wie vor über die Einheit, und es ergibt sich wieder eine gerade Zahl. Wenn

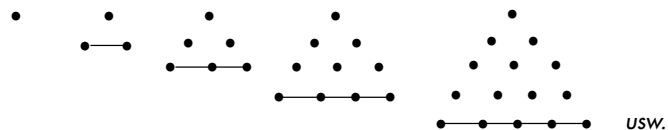
zwei ungerade Zahlen addiert werden, kombiniert sich die Einheit von beiden, wodurch die Andersheit über die Einheit siegt und gleichfalls eine gerade Zahl entsteht. Wenn eine gerade und eine ungerade Zahl addiert werden, bleibt die Einheit der ungeraden Zahl erhalten, und es entsteht wieder eine ungerade Zahl. Zusammengefaßt, wenn ähnliche Zahlen addiert werden, siegt die Andersheit über die Einheit, und eine gerade Zahl entsteht. Wenn unähnliche Zahlen addiert werden, siegt die Einheit über die Andersheit, und eine ungerade Zahl entsteht.

Wenn eine gerade Zahl eine gerade Anzahl von Malen addiert wird (d.h. mit einer geraden Zahl multipliziert wird), wird sich die Andersheit nach wie vor durchsetzen und stets eine gerade Zahl ergeben. Wenn eine ungerade Zahl eine gerade Anzahl von Malen addiert wird (d.h. mit einer geraden Zahl multipliziert wird), siegt die Andersheit und es ergibt sich eine gerade Zahl. Wenn eine ungerade Zahl eine ungerade Anzahl von Malen addiert wird (d.h. mit einer ungeraden Zahl multipliziert wird), siegt die Einheit über die Andersheit, und es ergibt sich eine ungerade Zahl.

Anders als bei der Addition erzeugen unähnliche Zahlen bei der Multiplikation gerade Zahlen, und ähnliche Zahlen behalten ihren Typ bei. (Es lohnt sich, das selbst nachzuprüfen; es trifft immer zu. Der Leser sollte auch das entsprechende Prinzip für die Subtraktion und Division sowie für die sekundären Ordnungstypen von gerade-gerade, gerade-ungerade, ungerade-gerade, ungerade-ungerade in bezug auf Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division herausfinden.) Mit diesem Wissen über die Konstruktion linearer Zahlen dehnt der Gefangene seine Experimente in einen neuen Bereich aus und untersucht nun die Konstruktion polygonaler oder Vieleckzahlen. Er beginnt mit dem Vieleck mit der geringsten Seitenzahl, dem Dreieck (Abbildung 3).

Anders als lineare Zahlen werden Dreieckszahlen nicht durch Addition von eins, sondern durch das Hinzufügen der linearen Zahlen selbst erzeugt. Jedes nachfolgende Dreieck enthält alle vorigen Dreiecke plus die nächste lineare Zahl. Der hinzugefügte Teil nennt sich Gnomon (in der Abbildung durch verbindende Linien gekennzeichnet). In der griechischen Geometrie nennt man so eine Form, deren Hinzufügung zu einer Figur eine der ursprünglichen ähnliche Figur ergibt. Das Wort Gnomon leitet sich aus dem griechischen Wort „wissen“ ab. (Der dreieckige Stab einer Sonnenuhr,

Abb. 3



Erfreut über seine wachsende Erkenntnisfähigkeit, eine Kongruenz nicht auf der Oberfläche, sondern im zugrundeliegenden Erzeugungsprinzip entdeckt zu haben, geht unser Gefangener noch einen Schritt weiter. Indem er seine Experimente auf Vielecke zunehmender Seitenzahl ausdehnt, möchte er neue Anomalien entstehen lassen, um so noch weitere Ordnungsprinzipien zu entdecken.

Damit wären wir bei den Fünfeckzahlen, die er folgendermaßen konstruiert (Abbildung 5).

Wiederum enthält jede Fünfeckzahl in sich alle vorigen Fünfeckzahlen. Sie nehmen dadurch zu, daß man zu jeder Fünfeckzahl jede dritte lineare Zahl hinzuaddiert: 1, 1 + 4, 1 + 4 + 7, 1 + 4 + 7 + 10, 1 + 4 + 7 + 10 + 13, ..., was die Reihe der Fünfeckzahlen 1, 5, 12, 22, 35, ... ergibt. Die Differenzen (Abstände) zwischen den Fünfeckzahlen bilden die Reihe 4, 7, 10, 13, ... Die Differenz der Differenzen ist stets 3 bzw. durch 3 teilbar.

Wie die Quadratzahlen und die Dreieckszahlen sind auch die Fünfeckzahlen nicht gleich und es gibt keinen Modulus, in bezug auf den alle Fünfeckzahlen kongruent sind. Aber wenn sich der Gefangene das Erzeugungsprinzip der Fünfeckzahlen betrachtet, findet sich ein Modulus, unter dem sich das Ordnungsprinzip als Eins fassen läßt. Die Differenzen zwischen den Fünfeckzahlen sind alle mit der Einheit bezogen auf Modulus 3 kongruent. Die Einheit ergibt sich als das, wozu sämtliche Differenzen zwischen den Fünfeckzahlen kongruent sind bezogen auf den Modulus der Differenz der Differenzen (hier Modulus 3).

Dieser Prozeß läßt sich auf Vielecke mit immer größerer Seitenzahl ausdehnen, so daß man Sechseckzahlen, Siebeneckzahlen, Achteckzahlen usw. bilden kann. Unser Gefangener nimmt sich die Zeit, sorgfältig jede Vieleckreihe aufzuzeichnen, um das Erzeugungsprinzip jeder Vieleckreihe geistig auf den Begriff zu bringen, in Eins zusammenzufassen. (Der Leser wäre gut beraten, es ihm nachzutun.)

Daraufhin stellt sich dem Gefangenen eine grundsätzlichere Frage: „Unter welchem Erzeugungsprinzip kann man die Erzeugungsprinzipien sämtlicher Vieleckzahlen in Eins bringen?“

Mit jedem neuen Vieleck wird eine neue Zahlenreihe konstruiert. Anders als die linearen Zahlen, die jeweils durch Hinzufügung von 1 wachsen, nehmen die Vieleckzahlen um jeweils immer größere Beträge zu. Jede Vieleckreihe hat ihre Einheit nicht in bezug auf jede Zahl der

Reihe, sondern auf die Differenzen zwischen den Zahlen, die alle kongruent sind mit der Einheit bezogen auf den Modulus, der sich aus der Differenz der Differenzen ergibt. (Der Leser wird feststellen, daß der Modulus immer der Zahl der Vieleckseiten minus 2 entspricht.)

Unser Gefangener hat damit das Erzeugungsprinzip eines Erzeugungsprinzips entdeckt.

(Diese Entdeckungen, die teilweise schon im klassischen Griechenland bekannt waren, wurden später von Pascal und Fermat untersucht und bildeten die Grundlage für Leibniz' Entdeckung des Differentialkalkulus und wurden von Gauß bei der Entwicklung der komplexen Zahlen erneut aufgegriffen.)

Jetzt schaut unser Gefangener noch einmal auf seine Arbeit zurück und holt tief Atem. Er fühlt sich, als hätte er einen hohen Berg bestiegen, wobei Richtung und Steilheit des Weges sich beständig veränderten. Der Weg begann mit dem einfachen Schritt des Hinzufügens von 1, um die linearen Zahlen zu konstruieren. Der Weg wurde kurvenreicher und der Steigungswinkel wuchs, als das Zahlenkonzept in den Bereich der Vielecke vorstieß. Auf dem Gipfel kann er sich nun die Änderung von Krümmung und Steigungswinkel als Eins denken, entsprechend einem Prinzip, das mit dem Ausgangsprinzip kongruent ist, jetzt aber in ganz neuem Licht erscheint. Das Hinzufügen von 1, die Addition der Einheit, liegt nicht mehr in der Erzeugung der Zahlen selbst, sondern in der Erzeugung der Moduli, unter denen die Differenzen zwischen den Reihen der Vieleckzahlen selbst mit der Einheit kongruent gemacht werden.

Indem er diesen ganzen Prozeß vom Gipfel her mit seinem geistigen Auge überblickt, fragt sich unser Gefangener: „Was für eine Krümmung drückt sich hierin aus?“

## Der Gefangene und der Professor

Seine Gedanken werden plötzlich durch herannahende Schritte unterbrochen. Als er aufsieht, steht ein gutgekleideter Jungakademiker mit etwas schwammigem Gesicht vor ihm, der sich offenbar sehr wichtig vorkommt. Der Mann hält ein großes, schweres Lehrbuch in der Hand. Unser Gefangener schaut den Fremden fragend an, der ihm die Hand hinhält und sagt: „Hallo, ich bin Dr. Hosenbein. Schön Sie zu treffen. Ich bin Gastprofessor für theoretischen und angewandten Unsinn. Ich

habe gehört, Sie brauchen etwas Nachhilfe?“

Der Gefangene starrt ihn einen Moment ungläubig an, und es ist ihm zumute, als entwichen alle gerade gefaßten Gedanken aus seinem Kopf. Das Mittagessen grummelt in seinem Magen. Doch dann beschließt er, sich zur Wehr zu setzen.

„Ich habe gehört, daß Sie mit Zahlen herumgespielt haben“, befragte Dr. Hosenbein unseren Gefangenen. „Vielleicht kann ich Ihnen helfen, in dieser Sache weiterzukommen.“

„Nun ja“, erwidert unser Gefangener langsam, um etwas Zeit zu gewinnen und seine Gedanken zu sammeln. „Ich habe nur so einige Experimente gemacht.“ „Experimente!?“ entrüstet sich Hosenbein, „und das mit Zahlen? Niemand experimentiert mit Zahlen. Es gibt genau vorgegebene Regeln für den richtigen Umgang mit Zahlen. Und diese Regeln wurden von Professor zu Professor, von Generation zu Generation weitergegeben. Komplizierte, verwickelte Regeln. Man braucht Jahre, bis man sie im Kopf hat. Sie können diese Regeln entweder lernen, oder wir geben Ihnen einen Taschenrechner mit entsprechenden Symbolen darauf. Niemand kann etwas lernen, indem er mit Zahlen experimentiert. Da gibt es nichts zu experimentieren. Außerdem kann man im Geist keine Experimente durchführen.“

„Nicht im Geist, sondern über den Geist“, korrigiert ihn der Gefangene. „Meine Experimente sollen mir entdecken helfen, wie mein eigener Geist denkt.“

„Was auch immer“, murmelt der Professor nach einer kurzen Pause.

„Kennen Sie denn all diese Regeln?“ Der Gefangene versucht noch immer seine Gedanken zu sammeln.

„So gut wie alle. Und sobald eine neue erfunden wird, lerne ich sie auch noch.“

„War das die Voraussetzung, um Ihren Dokortitel zu bekommen?“ fragt der Gefangene.

„Ja. Ich mußte memorieren, repetieren, manipulieren, eulogisieren, generalisieren, syllogisieren, tautologisieren, brutalisieren, formalisieren, legalisieren, symbolisieren, transpirieren, fraternisieren, tyrannisieren, plagiarisieren und vulgarisieren – nur hypothetisieren brauchte ich, bisher jedenfalls, nicht. Wenn Sie etwas lernen wollen, können wir sofort mit dem Unterricht beginnen.“

Hosenbeins Gesicht ist im Laufe seiner Rede immer röter geworden, und kleine Schweißperlen bilden sich auf Stirn und

Kinn. Den Gefangenen beschleicht das Gefühl, daß sein ganzer Tag verdorben sein wird, wenn ihm nicht schnellstens etwas einfällt. Denn Weglaufen kann er ja nicht. Da fällt ihm eine Entdeckung ein, die er bis jetzt nur halb fertig im Kopf hatte. Er entschließt sich, den Professor auf die Probe zu stellen.

„Ich möchte Ihnen zuerst zeigen, was ich durch meine Experimente entdeckt habe“, beginnt er.

„Gut, aber das darf nicht zu lange dauern, denn wir haben eine Menge Arbeit vor uns, wenn Sie lernen wollen, was ich alles gelernt habe.“

Der Gefangene schildert schnell seine Experimente und Entdeckungen mit den geraden, ungeraden und Vieleckzahlen.

„Das ist doch nichts besonderes“, entgegnet Hosenbein, „für all das haben wir Regeln. Wären Ihnen diese bekannt gewesen, hätten Sie sich die ganze Herummummelei mit Linien und Punkten und diese lächerlichen Zeichnungen sparen können. Gehen wir endlich an die Arbeit!“

„Bevor wir das tun, lieber Professor, möchte ich Ihnen einige Fragen stellen, damit Sie die Ergebnisse meiner Experimente besser verstehen. Sind Sie damit einverstanden?“

„Wenn es nicht zu lange dauert“, antwortet Hosenbein, wobei er sein Gewicht von einem Bein auf das andere verlagert und eines seiner Knie in rasche Vibration gerät.

„Dann los“, beginnt der Gefangene. „Da ich bereits einiges über lineare und polygonale Zahlen entdeckt habe, möchte ich nun fragen, was geschieht, wenn man Flächen addiert.“

„Flächen?“

„Ja, Flächen. Wenn ich eine Fläche mit der Größe 1 habe und eine weitere Fläche ebenfalls mit der Größe 1 hinzuaddieren möchte, was kommt dabei heraus?“

„Das ist doch klar:  $1 + 1 = 2$ .“

„Und was kommt heraus, wenn ich eine Fläche mit der Größe 2 und eine weitere Fläche mit der Größe 2 addiere?“

„Das geht genauso:  $2 + 2 = 4$ .“

„Und wenn ich eine Fläche mit der Größe 4 verdopple?“

„Wieder das gleiche:  $4 + 4 = 8$ . Natürlich könnte man ebensogut  $2 \cdot 4 = 8$  sagen, oder  $2 + 2 + 2 + 2 = 8$ , oder  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ , oder  $2^3 = 8$ .“

„Gut. Wir sollten diese Flächen vielleicht einmal aufzeichnen, um zu sehen, was dann geschieht.“

„Warum vergeuden Sie Ihre Zeit mit diesen Zeichnungen?“ brummte der Professor ärgerlich. „Ich habe Ihnen doch

gerade gezeigt, wie man das Ergebnis durch Addieren, Multiplizieren oder Potenzieren erhält. Warum, zum Teufel, geben Sie sich mit diesen langwierigen Zeichnungen ab?“

„Versuchen wir es doch einmal. Es dauert gar nicht lange. Hier!“ Der Gefangene reicht dem Professor freundlich Papier und Bleistift.

„Was, ich? Zeichnen?“

„Ja bitte, versuchen Sie es doch einmal.“

„Wenn es sein muß“, sagt Hosenbein mürrisch und ergreift widerwillig den Stift.

„Zeichnen Sie nun ein Quadrat, dessen Fläche 1 sein soll“, weist der Gefangene den Professor an. Hosenbein gehorcht und malt ein kleines Quadrat in die Mitte des Blatts. (Wie gewöhnlich sollte der Leser das gleiche tun, siehe *Abbildung 6*.)

„Nun zeichnen Sie ein weiteres Quadrat der gleichen Größe an das erste Quadrat“, lautet die nächste Anweisung. „Was ist dadurch entstanden?“, fragt der Gefangene.

„Ein Rechteck im Seitenverhältnis 1:2“, erwidert der Professor.

„Und wie groß ist die Fläche des Rechtecks?“

„Zwei.“

Sehen Sie, wir haben zwei Quadrate addiert und ein Rechteck erhalten“, sagt der Gefangene stolz.

„Wo liegt der Unterschied?“, meint Hosenbein wegwerfend. „Ich bin zu der gleichen Antwort auch mit meiner Regel  $1 + 1 = 2$  gekommen. Und zwar viel schneller.“

„Machen wir weiter“, sagt der Gefangene, ohne auf den Unmut des Professors zu achten. „Bitte zeichnen Sie ein weiteres Rechteck von  $1 \cdot 2$  an das bereits vorhandene dran. Was ergibt sich nun?“

„Ein Quadrat von  $2 \cdot 2$ .“

„Und wie groß ist die Fläche dieses Quadrats?“

„Vier“, antwortet der Professor. „Aber dieses Ergebnis habe ich doch schon ausgerechnet:  $2 + 2 = 4$ , oder auch  $2 \cdot 2 = 4$ .“

„Bitte. Können wir fortfahren?“ Der Gefangene redet dem Professor zu, weiter zu zeichnen. Hosenbein zeichnet ein weiteres Quadrat von  $2 \cdot 2$  an das vorige dran, wodurch ein  $2 \cdot 4$ -Rechteck mit der Fläche 8 entsteht. Und indem ein weiteres  $2 \cdot 4$ -Rechteck an das vorige gesetzt wird, entsteht ein Quadrat mit der Fläche 16.

„Sehen Sie“, sagt der Gefangene begeistert, „zuerst hatten Sie ein Quadrat, dem Sie ein gleiches Quadrat hinzufügten, wodurch ein Rechteck mit der dop-

pelten Fläche des Quadrats entstand. Dann fügten Sie ein gleiches Rechteck hinzu, und es ergab sich wieder ein Quadrat mit der doppelten Fläche des Rechtecks. Im weiteren Verlauf ergab sich wieder ein Rechteck, dann wieder ein Quadrat. Die erste Hinzufügung ergibt ein Rechteck, die zweite ein Quadrat, die dritte Hinzufügung wieder ein Rechteck, die vierte ein Quadrat usw.“

„Aber ich komme auf meine Weise zum gleichen Ergebnis:

$1 \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16$ ..., oder auch so:  $2^0=1$ ,  $2^1=2$ ,  $2^2=4$ ,  $2^3=8$ ,  $2^4=16$ ...“, beharrt der Professor.

Der Gefangene strahlt von einem Ohr zum anderen: „Aber mit Ihrer Methode haben Sie nicht die Reihe abwechselnder Quadrate und Rechtecke entdeckt. Wir haben nun herausgefunden, daß die ungeradzahligten Additionen von Flächen Rechtecke ergeben und die geradzahligten Additionen Quadrate.“

Hosenbein schnaubt, zuckt mit den Achseln und sagt: „Wollen Sie nun endlich die Regeln lernen?“

„Darf ich Ihnen noch eine Reihe von Fragen stellen?“, sagt der Gefangene schnell.

„Noch eine und nicht mehr“, willigt der Professor zögernd ein, denn irgendwie ist doch seine Neugier erwacht.

„Versuchen wir also folgendes: Zeichnen Sie ein Quadrat mit der Fläche 1 wie vorhin. Daneben zeichnen Sie ein Quadrat, dessen Fläche genauso groß ist wie das  $1 \cdot 2$ -Rechteck, d.h. 2. Und daneben ein Quadrat, dessen Fläche genauso groß ist wie das  $2 \cdot 4$ -Rechteck. Verfahren Sie weiter so mit allen Flächen, die Sie in der ersten Reihe von Zeichnungen erzeugt haben.“ Der Professor zeichnet die Quadrate fein säuberlich nebeneinander, angefangen mit der Fläche 1, dann 2, 4, 8, 16 usw. (*Abbildung 7*).

„Herr Professor, wie lang ist die Seite des ersten Quadrats, dessen Fläche 1 ist?“, will der Gefangene nun wissen.

„1 natürlich“, antwortet Hosenbein.

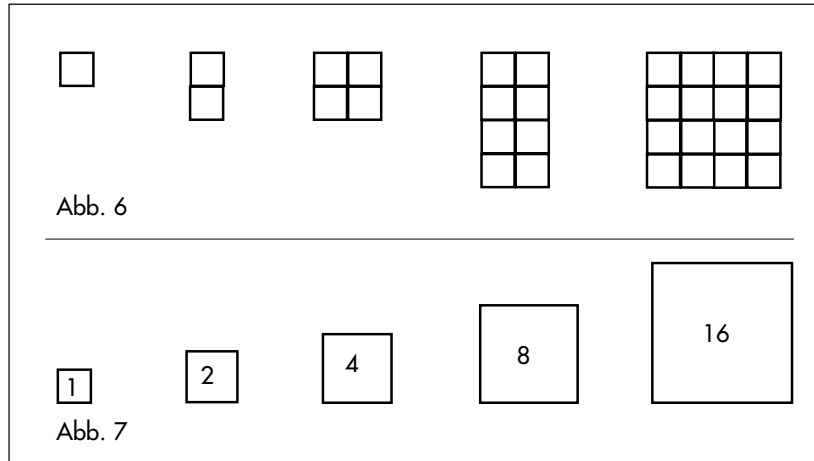
„Und wie lang ist die Seite des zweiten Quadrats, dessen Fläche 2 ist?“

„Wurzel aus 2“, entgegnet der Professor sachlich.

„Und was ist Wurzel aus 2?“

„Das ist die Länge der Seite des Quadrats, dessen Fläche 2 ist, und wird mit diesem Symbol bezeichnet“, sagt der Professor, ohne mit der Wimper zu zucken, und zeichnet mit dem Finger ein Wurzelzeichen in die Luft.

„Aber“, entgegnet der Gefangene, „ich weiß doch bereits, daß die Fläche des Quadrats 2 ist. Sie wiederholen sich bloß,



wenn Sie sagen, die Seitenlänge sei ‚die Länge der Seite des Quadrats, dessen Fläche 2 ist‘.“

„Genau, die Wurzel aus 2“, wiederholt der Professor mit noch größerem Nachdruck.

„Aber das sagt gar nichts aus. Was bedeutet die Wurzel aus 2?“, fragt der Gefangene erneut. „Doch machen wir weiter. Wie lang ist die Seite des nächsten Quadrats, jenes mit der Fläche 4?“

„Zwei“, antwortet der Professor.

„Sehr gut. Und wie lang ist die Seite des nächsten Quadrats mit der Fläche 8?“, fragt der Gefangene.

„Wurzel aus 8“. Dieses Mal mischt sich in den Stolz des Professors, die Frage beantworten zu können, ein wenig Unbehagen, denn er ahnt bereits die Reaktion des Gefangenen.

„Da haben wir es wieder. Sie haben nur die Frage als Antwort wiederholt. Ich fragte: ‚Wie lang ist die Seite des Quadrats mit der Fläche 8?‘, und Sie antworteten: ‚Die Länge der Seite des Quadrats, dessen Fläche 8 ist‘. Das ist keine Antwort. Auf diese Weise haben wir nichts entdeckt.“

Hosenbein kann es einfach nicht glauben, daß der Gefangene seine Antwort zurückweist und kommt sichtlich unter Druck. Der Gefangene bemerkt dies wohl, doch da er hofft, daß dieses Verhör eine befreiende Wirkung auf den Geist des Professors haben wird, wiederholt er möglichst zartfühlend seine Frage: „Wie lang ist die Seite des Quadrat mit der Fläche 2 oder 8? Oder, mit anderen Worten, was ist die Quadratwurzel aus 2 oder 8?“ \*

\* Was hätten Sie denn auf diese Frage geantwortet? (Und antworten Sie bitte nicht „Wurzel aus 2 ist 1,414...“)

„Hier, halten Sie das ‚mal!‘“ Der Professor gibt dem Gefangenen das Schreibzeug zurück und wühlt hektisch in seinem Lehrbuch. „Ich weiß, es steht irgendwo hier drin“, sagt er, in der einen Hand das schwere Buch balancierend, mit der anderen kopflos blättern. Der Gefangene sagt gar nichts, lächelt nur etwas schief.

„Einen Augenblick, ich finde es schon“, bittet Hosenbein. „Verdammt nochmal! Das falsche Buch! Eine Minute Geduld, gehen Sie nicht weg, ich bin sofort wieder da. Ich muß mein anderes Buch holen.“ Die letzten Worte ruft der Professor, während er bereits durch die Halle davoneilt. Ein Hemdzipfel hängt ihm aus der Hose, und außerdem meint der Gefangene, ein Geräusch rasselnder Ketten zu vernehmen, das immer leiser wird, je weiter der Professor sich entfernt.

Von der Unterhaltung mit Hosenbein fürs erste entbunden, wendet der Gefangene sich erneut den gerade entstandenen Zeichnungen zu. Er verbringt einige Zeit damit, ähnliche Zeichnungen anzufertigen, bei denen er die Fläche jedesmal verdreifacht, dann vervierfacht und verfünffacht. Jedesmal erhält er eine Reihe mit abwechselnd Quadraten und Rechtecken, wobei die erste Addition ein Rechteck ergibt, die zweite ein Quadrat, die dritte ein Rechteck usw. Die Fläche nimmt zwar verschieden schnell zu, aber der Typ der Veränderung ist in jedem Fall der gleiche; die ungeradzahlig Additionen (bzw. Potenzen) ergeben Rechtecke, die geradzahlig Additionen (bzw. Potenzen) ergeben Quadrate. Er hat die Bedeutung von gerade und ungerade in einem neuen Bereich entdeckt.

Als er lineare Zahlen zusammenzählte und so Vieleckzahlen erzeugte, hatte jeder Typ der verschiedenen Vieleckzahlen

eine unterschiedliche Wachstumsrate, die aber innerhalb jeder Folge gleich blieb. Bei den linearen Zahlen entdeckte er Kongruenzen zwischen gerade und ungerade, zwischen gerade-gerade, gerade-ungerade, ungerade-gerade und ungerade-ungerade. Bei den Vieleckzahlen entdeckte er Kongruenzen in bezug auf die Veränderung von Zahl zu Zahl. Aber Flächen (geometrische Zahlen) drücken einen gänzlich anderen Typ der Veränderung aus, wenn die Zahlen zunehmen.

Diese zweidimensionalen geometrischen Zahlen reflektieren einen neuen Bereich. Auch hier gibt es Kongruenz in bezug auf gerade und ungerade, aber auf ganz andere Weise. Hier bedeutet Geradzahligkeit Quadrate und Ungeradzahligkeit Rechtecke. Bei der aufgezeichneten Reihe von Quadraten sind die Seiten der Quadrate mit geradzahlig Fläche kommensurabel mit der Fläche, während die Seiten der Quadrate mit ungeradzahlig Fläche inkommensurabel mit der Fläche sind. Der Begriff der Zahl ist nicht von ihrem Inhalt zu trennen, der den Bereich reflektiert, in dem die Zahl sich befindet. Sogar etwas scheinbar so Einfaches wie gerade und ungerade hat also in verschiedenen Bereichen ganz unterschiedliche Bedeutung.

Der arme Professor hätte nie geahnt, daß er (im Unterschied zu den aufmerksamen Lesern dieser Serie) mit seiner Methode bei jedem zweiten Quadrat dessen Seitenlänge geometrisch gar nicht erklären konnte, obwohl er die Quadrate selbst hingezeichnet hatte. „Vielleicht besteht noch eine gewisse Hoffnung für ihn“, sagt sich der Gefangene, „wenn er nur versuchte, zu entdecken, anstatt bloß zu lernen“.

Bruce Director

Wenn Sie mehr wissen wollen und Englisch können, dann besuchen Sie auch die Homepage der Internationalen LaRouche-Jugendbewegung

[www.wlym.com](http://www.wlym.com)

Dort gibt es viele „pedagogicals“.