Der Bau einer arithmetischen Werkzeugmaschine

Wie Gauß das Datum des Osterfestes für jedes beliebige Jahr bestimmte

Von Bruce Director

Unsere pädagogische Übung in FUSION 2/2004 endete mit der provokanten Frage: „Wenn es kein umfassendes mathematisches System gibt, das die verschiedenen Zyklen miteinander kombiniert und erklärt, wie können wir dann das ‚Eine' verstehen, welches das Entstehen immer neuer astronomischer Zyklen als Ausdruck neuer Freiheitsgrade in unserem Universum in sich schließt?"

Carl Friedrich Gauß hat dieses Problem auf sehr elegante Weise behandelt, indem er das Osterdatum in beliebigen Kalenderjahren allein mit Hilfe der höheren Arithmetik berechnete. Dies erfordert rechnerisch nur einfache Arithmetik, aber man muß wie in der höheren Arithmetik geistig in der Lage sein, ein immer komplexeres Vieles begrifflich in Eins zusammenzufassen. Das ist eine subjektive Frage. Wir suchen keine mathematische Formel, sondern eine Abfolge von Schritten, im Zuge derer ein zunächst verwirrend erscheinender Knäuel inkommensurabler Zyklen geistig durchschaubar wird. In gewissem Sinne planen und bauen wir hierfür eine Werkzeugmaschine, aber nur die gesamte Maschine kann die Aufgabe erledigen. Kein Einzelteil und keine Gruppe von Teilen reicht dazu hin. Zu der Maschine gehören nicht nur die „beweglichen Teile", sondern vor allem die Konzeption dahinter. Die Teile und das Konzept müssen zusammen als „Eins" begriffen werden, sonst bleibt sie, d.h. der Denkprozeß, stehen, während Erde, Sonne, Mond und Sterne völlig ungerührt durch solche Denkblockaden in ihrer Bewegung fortfahren.

Nun wollen wir also Gauß' Entdeckung nachspüren. Um eine solche Maschine zu bauen, muß man allerdings bereit sein, sich die Hände schmutzig zu machen und etwas Schweiß zu verlieren, sorgfältige Zeichnungen anzufertigen, die Teile bis zur Präzision zu schleifen, schwere Bestandteile an ihren Platz zu wuchten und schließlich die notwendige Energie (Agape) aufzuwenden, um die Maschine zum Laufen zu bringen.

Am Anfang seines Aufsatzes „Berechnung des Osterfestes" (im August 1800 in der vom Freiherrn von Zach herausgegebenen *Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde* erschienen) schreibt Gauß:

Carl Friedrich Gauß starb vor 150 Jahren. (1777-1855)

„Die Absicht dieses Aufsatzes ist nicht, das gewöhnliche Verfahren zur Bestimmung des Osterfestes zu erörtern, das man in jeder Anweisung zur mathematischen Chronologie findet, und das auch an sich leicht genug ist, wenn man einmal die Bedeutung und den Gebrauch der dabei üblichen Kunstwörter *güldne Zahl, Epacte, Ostergränze, Sonnenzirkel* und *Sonntagsbuchstaben* weiß, und die nöthigen Hülfstafeln vor sich hat; sondern von dieser Aufgabe eine von jenen Hülfsbegriffen unabhängige und blos auf den einfachsten Rechnungs-Operationen beruhende rein analytische Auflösung zu geben. Hoffentlich wird dieselbe nicht allein dem bloßen Liebhaber, dem jene Methode nicht geläufig ist, oder der wohl in den Fall kommt, die Bestimmung der Zeit des Osterfestes unter Umständen, wo ihm die nöthigen Hülfsmittel nicht zur Hand sind, oder für ein Jahr, worüber er keinen Kalender nachschlagen kann, auf der Stelle zu wünschen, nicht unangenehm sein, sondern sich auch dem Kenner durch ihre Einfachheit und Geschmeidigkeit empfehlen."

Freiherr von Zach

Dieser Aufsatz erschien, nachdem Gauß seine *Disquisitiones arithmeticae* beendet hatte und auf deren Veröffentlichung wartete, und es ging ihm in erster Linie darum, am Beispiel der Berechnung des Osterfestes die Gültigkeit seiner Grundsätze der höheren Arithmetik zu demonstrieren. Seit den frühesten Kulturen wurden die verschiedenen astronomischen Zyklen separat erklärt und mit Hilfe verschiedener Tabellen und Berechnungsverfahren nebeneinander gestellt. Diese Methode genügte, um Jahr für Jahr das Osterdatum zu bestimmen. Gauß' Berechnung hingegen beweist die Fähigkeit des menschlichen Denkens, eine neue Mathematik zu schaffen, womit man etwas, das nach bisherigem Wissen unverständlich war, zu begreifen — es in „Eins" zu fassen.

Wir wollen also das Osterfest für jedes beliebige Jahr errechnen. Ostern fällt auf den ersten Sonntag nach dem ersten Vollmond (Paschalmond oder bei Gauß Ostergränze genannt) nach der Frühjahrs-Tagundnachtgleiche. Wir haben es dabei mit drei inkommensurablen astronomischen Zyklen (Tag, Sonnenjahr und Lunarmonat) sowie einem gesellschaftlich festgelegten Zyklus, der siebentägigen Woche, zu tun.

Betrachten wir nun genauer, welche Aufgabe unsere „Werkzeugmaschine" zu lösen hat:

1. Sie muß bestimmen, wieviele Tage nach der Frühjahrs-Tagundnachtgleiche der Paschalmond stattfindet. Das ist von Jahr zu Jahr verschieden. Somit muß die Maschine eine Funktion besitzen, die den Modulus zwischen Sonnenjahr (365,24 Tage) und Lunarmonat (29,53 Tage) feststellt.
2. Danach muß die Maschine außerdem die bis zum nächstfolgenden Sonntag verbleibende Zahl von Tagen berechnen.

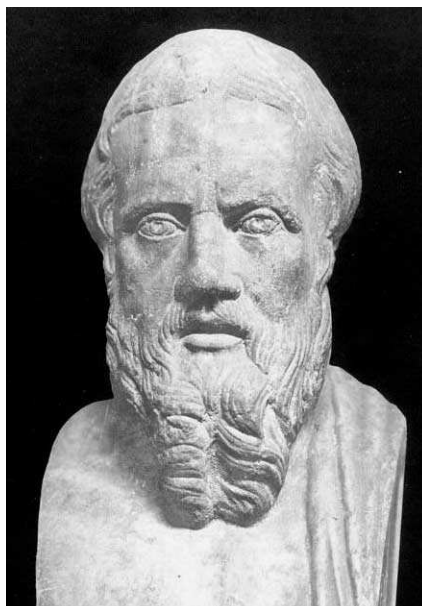
Die Inkommensurabilität des Sonnenjahres und des Lunarmonats ist ein uraltes Denkproblem, von dessen Lösung das menschliche Potential für wirtschaftlichen Fortschritt abhängt. Bei alleiniger Beachtung des am Himmel leichter ablesbaren Lunarmonats würden die Jahreszeiten (die sich aus den Positionsveränderungen der Erde zur Sonne ergeben) von Jahr zu Jahr in unterschiedliche Jahresabschnitte fallen. Wenn man sich andererseits auf das Sonnenjahr stützt, braucht man eine zusätzliche Unterteilung zwischen Tag und Jahr, um kleinere Zeitabstände messen zu können. Der Versuch, den Mondzyklus und den Sonnenzyklus einfach linear zu einem Kalender miteinander zu kombinieren, führt zu völligem Durcheinander. So braucht man allein zum Ablesen des babylonisch beeinflußten hebräischen Kalenders eine besondere Priesterausbildung. Kurz nach Erscheinen seiner Osterfestformel wandte Gauß die gleiche Methode auf das weit komplexere Problem der Berechnung des ersten Tages des Passahfestes an und unterwarf so den babylonischen Lunisolar-Kalender den Kräften der höheren Arithmetik.

Im Jahre 423 v.Chr. soll der griechische Astronom Meton entdeckt haben, daß 19 Sonnenjahre 235 Lunarmonate enthalten. Das ist die geringste Zahl von Sonnenjahren, die eine ganzzahlige Menge von Lunarmonaten enthält. Es gibt Hinweise, daß andere Kulturen, vor allem die Chinesen, die gleiche Kongruenz schon früher entdeckt haben.

Durch die folgende einfache Berechnung können wir Metons Entdeckung nachvollziehen. Ein Sonnenjahr hat 365,2425 Tage. 12 Lunarmonate haben 354,36 Tage (12 · 29,53), d.h. 11 Tage weniger als das Sonnenjahr. Daraus folgt, daß jede Mondphase im Vergleich zum Sonnenkalender 11 Tage früher als im Vorjahr eintritt. (Ist z.B. am 1. Januar Neumond, dann wird nach 12 Lunarmonden ein Neumond auf den 20. Dezember fallen, d.h. 11 Tage vor dem 1. Januar. Der nächste Neumond wäre dann am 19. Januar, 19 Tage nach dem 1. Januar.)

Ein Sonnenjahr enthält 12,368 Lunarmonate (356,2425 : 29,53). In 19 Jahren vergehen 6939,6075 Tage (365,2425 · 19). In 19 Jahren bestehend aus 12,368 Lunarmonaten vergehen 6939,3137 Tage (19 · 12,368 · 29,530). Wenn man somit einen Zyklus von 6939 Tagen oder 19 Sonnenjahren annimmt, werden die Phasen des Mondes und der Tage des Sonnenjahres nahezu kongruent.

Trotz Metons Entdeckung blieb der griechische Kalender mit dem Mangel behaftet, daß Lunarmonate und Sonnenjahr sich nicht zu einem einzigen linearen Kalenderzyklus vereinigen lassen. Da 12 Lunarmonate 11 Tage weniger haben als das Sonnenjahr, mußten in den Metonischen Kalender (wie auch in den babylonischen und hebräischen Kalender) regelmäßige Schaltmonate eingefügt werden, und zwar in den Jahren 3, 5, 8, 11, 13 und 16 des 19jährigen Zyklus.

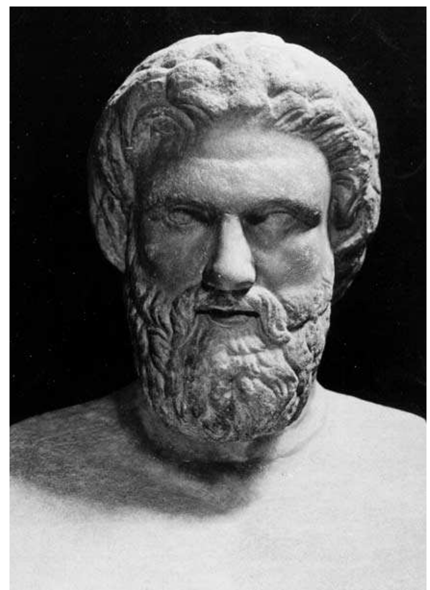


Herodot

In seiner *Geschichte* äußert Herodot sich über die Nachteile des griechischen Kalenders gegenüber dem der Ägypter, der sich nur auf das (allerdings schwerer zu messende) Sonnenjahr stützte:

„Was aber auf menschliche Dinge geht, so erzählen sie miteinander übereinstimmend wie folgt: Die Ägypter hätten als erste von allen Menschen das Jahr gefunden, indem sie die Jahreszeiten in zwölf Teile zerlegten und die auf das Jahr verteilten. Das hätten sie aus den Gestirnen gefunden, sagten sie. Sie machen es aber geschickter als die Hellenen, meine ich, insofern als die Hellenen jedes zweite Jahr einen Schaltmond einschalten der Ordnung der Jahreszeiten halber, die Ägypter aber die Monate zu dreißig Tagen nehmen und jedes Jahr fünf Tage dazunehmen über die Zahl, und so haben sie einen Kreislauf der Jahreszeiten, der immer wieder auf den gleichen Tag hinauskommt." (Herodot, *Geschichten und Geschichte*, 2. Buch, Abschnitt 4)

Die oligarchische Gegenposition drückt Aristophanes in seiner Komödie *Die Wolken* aus, worin er die Chorleiterin den Athenern schöne Grüße von der Mondgöttin Selene bestellen läßt:



Aristophanes

„Als wir hierher aufzubrechen grade im Begriffe warn,
Lief Selene übern Weg uns, trug uns dies zu sagen auf:
Erstens läßt sie euch schön grüßen, Bürger, Bündner von Athen;
Zweitens, sagt sie, sei sie wütend; arg hab man ihr mitgespielt,
Da sie euch so viel genützt hat, nicht mit Worten: mit dem Werk.
Erstens spart sie euch pro Monat wenigstens zwei Mark für Licht;
Denn wenn einer abends ausgeht, sagt er: ‚Bursche, heute brauchst
Keine Fackel du zu kaufen, da so schön Selene scheint.'
Und sie tut auch sonst noch manches Gute, sagt sie, aber ihr
Haltet nicht die Tag' in Ordnung, sondern schmeißt sie kreuz und quer

Durcheinander, daß die Götter immer wieder sie bedrohen,
Wenn sie um ihr Mahl geprellt sind und enttäuscht nach Hause ziehn,
Weil kein Fest sie vorgefunden an dem Tag, da's fällig war.
Wenn ihr Opfer bringen solltet, prozessiert und urteilt ihr;
Umgekehrt, wenn bei uns Göttern Fastenzeit ist angesagt,
Etwas weil wir trauern müssen Memnons und Sarpedons halb',
Opfert ihr und feiert lustig. Darum, als Hyperbolos
Jüngst Gesandter war für Delphi, wurde von uns Göttern ihm
Stracks der Kranz vom Haupt gerissen, daß er künftig nicht vergeß'
Daß der Mensch die Erdentage nach dem Mondlauf rechnen soll."

Im Julianischen Kalender, der 46 v.Chr. eingeführt wurde, wurden alle Versuche, den Mondzyklus in den Kalender zu integrieren, aufgegeben. Doch erst, als Gauß seine höhere Arithmetik entwickelte, die sich ironischerweise auf eine umgearbeitete und nichtlinear erweiterte Form der klassischen griechischen Astronomie und Geometrie gründet, konnte der Mensch die scheinbar inkommensurablen Zyklen von Lunarmonat und Sonnenjahr in Eins fassen.

Der Bau der Werkzeugmaschine

Mit diesen Vorbemerkungen wollen wir nun die ersten Komponenten der Maschine herstellen, um die Anzahl Tage von der Frühjahrs-Tagundnachtgleiche bis zum Paschalmond zu berechnen. Wenn wir die Frühjahrs-Tagundnachtgleiche auf den 21. März festlegen, muß die Maschine zunächst eine Zahl D berechnen können, deren Addition zum 21. März uns das Datum des Paschalmonds angibt. (Der 21. März wurde auf dem Konzil von Nicäa im Jahre 325 als Datum festgelegt. Die tatsächliche Tagundnachtgleiche erfolgt manchmal auch in den letzten Stunden des 20. März oder den ersten Stunden des 22. März.)

Der Paschalmond oder die „Ostergränze" fällt dann auf einen der 30 Tage zwischen 21. März und 19. April. Der jährliche Wechsel zwischen diesen 30 möglichen Tagen ist Ausdruck des 19jährigen Metonischen Zyklus. Unsere Maschine muß also zwei Zyklen, den 19jährigen Metonischen Zyklus und den genannten 30tägigen Zyklus, unter einen Hut bringen.

Dazu ist etwas Nachdenken erforderlich. Da 12 Lunarmonate 11 Tage weniger haben als das Sonnenjahr, finden alle Vollmonde 11 Tage früher als im Vorjahr statt. Ganz naiv könnte man nun annehmen, daß man vom Datum des Paschalmonds in einem Jahr stets nur 11 Tage abziehen müsse, um den Paschalmond im nächsten Jahr zu finden. Aber wir müssen beachten, daß der Paschalmond nicht vor dem 21. März liegen darf. Fällt der Paschalmond in einem Jahr in den März, so würde er bei Abzug von 11 Tagen vor dem 21. März stattfinden, womit wir jedoch nichts anfangen können. Unsere Maschine muß also anders rechnen, wenn der Paschalmond im März anstatt im April stattfindet. Wenn der Paschalmond im April stattfindet, genügt es, 11 Tage zu subtrahieren, um das Datum für das kommende Jahr zu bestimmen. Wenn er aber im März stattfindet, muß die Maschine statt dessen 19 Tage hinzuzählen.

Um diesen Teil der Rechnung zu formulieren, begann Gauß mit einem bekannten Datum und abstrahierte die von Jahr zu Jahr erfolgenden Änderungen in bezug auf dieses Datum. Bezogen auf den 19jährigen Metonischen Zyklus wählte er als Ausgangspunkt der Rechnung das Datum des Paschalmondes im ersten Jahr des Zyklus (d.h. jene Jahre, die bei Teilung durch 19 als Rest 0 ergeben bzw. mit 0 kongruent sind in bezug auf Modulus 19). Im 18. und 19. Jahrhundert war dieses Datum der 13. April oder, anders ausgedrückt, der 21. März + 23 Tage. Zum besseren Verständnis läßt sich folgende Tabelle aufstellen:

Jahr	Rest (mod 19)	Paschalmond	Zahl der Tage nach T/N-Gleiche (D)
1710	0	13. April	23 Tage
1711	1	2. April	23 - 11 Tage
1712	2	22. März	23 - (2 · 11)
1713	3	10. April	23 - (2 · 11) + 19
1714	4	30. März	23 - (3 · 11) + 19

(Dem Leser wird empfohlen, die Tabelle selbst zu vervollständigen. Beachten Sie dabei das Wechselspiel zwischen dem 19jährigen und 30tägigen Zyklus.)

Aus der Tabelle läßt sich die entsprechende Schwankung ablesen. Wenn man z.B. für das Jahr 1713 weitere 11 Tage vom Vorjahr abzöge, käme man auf das Datum 11. März. An diesem Tag wäre zwar Vollmond, aber nicht der Paschalmond, denn der 11. März liegt vor der Frühjahrs-Tagundnachtgleiche. Der Paschalmond ist im Jahr 1713 30 Tage nach dem 11. März, d.h. am 10. April (22. März - 11 + 30 oder 22. März + 19).

Die Zahl der hinzugefügten oder abgezogenen Tage variieren von Jahr zu Jahr auf scheinbar unregelmäßige Weise. Konstant ist nur die Veränderung. Aber noch haben wir nichts anderes getan, als wenn man eine Reihe von Tabellen hätte.

Gauß' nächster Schritt besteht darin, die beiden Vorgänge, nämlich die Subtraktion von 11 Tagen oder die Addition von 19 Tagen, in einen Vorgang umzuwandeln. Dies kann auf mehrerlei Weise geschehen. Das Auffinden des richtigen Weges ist eine Frage der *Analysis situs* und betrifft eine der wichtigsten Methoden der wissenschaftlichen Forschung, die *Inversion* oder Umkehrung, die sich durch das gesamte Gaußsche Werk zieht. Es ist eine Sache, aus einer gegebenen Funktion das Ergebnis zu berechnen. Die umgekehrte Frage ist viel schwieriger. Welche von vielen möglichen Bedingungen führen zu einem gegebenen Ergebnis? Man braucht eine höhere Dimensionalität, um zwischen den verschiedenen Möglichkeiten zu entscheiden.

Das vorliegende Problem läßt sich vom Standpunkt der Inversion leicht lösen. Sämtliche jährlichen Unterschiede zwischen den Daten des Paschalmondes sind kongruent in bezug auf Modulus 11 oder 19. Aber keiner dieser Moduli ist für die vorliegende Aufgabe relevant. Es gilt, einen anderen Modulus herauszufinden, der nicht direkt aus der Tabelle ablesbar ist, sondern nur aus der höheren Dimensionalität des gesamten Prozesses hervorgeht. Wie gesagt, der Paschalmond findet an einem der 30 Tage zwischen 21. März und 19. April statt. Wir brauchen ein Mittel, um die Schwankung des Paschalmonddatums in bezug auf Modulus 30 ordnen zu können. Alle diese Tage 0-29 sind nichtkongruent in bezug auf Modulus 30.

Gauß kombinierte die beiden Vorgänge zu einem, indem er 19 Tage zu jedem Jahr addierte und 30 Tage von jenen Jahren abzog, in denen der Paschalmond im April stattfindet. Z.B. würde das Jahr 1711 in unserer obigen Tabelle so berechnet: 23 + 19 - 30. Das Jahr 1712: 23 + (2 · 19) - (2 · 30).

Da alle Zahlen, deren Differenz durch 30 teilbar sind, kongruent sind in bezug auf Modulus 30, würde die Addition oder Subtraktion von 30 das Ergebnis nicht ändern. Gauß hat dieses Problem in eine Kongruenz in bezug auf einen einzigen Modulus, 30, verwandelt. Somit führt die erste Teilkomponente unserer Maschine folgendes aus: Wahl des Jahres, Auffindung des Restes, Multiplikation mit 19, Addition von 23, Division durch 30. Das Ergebnis ist die Anzahl der Tage von der Frühjahrs-Tagundnachtgleiche bis zum Paschalmond.

Oder in Gauß' komprimierter Sprache: Man dividiere das Jahr durch 19 und nenne den Rest a. Man dividiere ferner (19a + 23) durch 30 und nenne den Rest D. Nun addiere man D zum 21. März und erhält das Datum des Paschalmonds.

Mond- oder Sonnenjahr?

Um den zweiten Teil der Aufgabe zu lösen, nämlich die Zahl der Tage vom Paschalmond bis zum darauffolgenden Sonntag zu bestimmen, müssen wir verschiedene unvollständige Zustände des menschlichen Wissens in Eins fassen. Es war für die Menschheit ein wesentlicher Schritt vorwärts, als man die Bemühungen aufgab, das Mond- und das Sonnenjahr in einen linearen Kalender zusammenzubringen, und das Sonnenjahr als primären Zyklus für den Kalender wählte. Der konzeptionelle Sprung lag darin, den Kalender statt auf den leicht wahrnehmbaren Lunarmonat auf das schwieriger zu bestimmende Sonnenjahr zu gründen. Die Bedeutung dieser Entscheidung für das Wirtschaftsgeschehen ist unübersehbar. Man sollte betonen, daß dies eine rein subjektive Frage ist, deren Lösung jedoch große Wirkung auf physische Prozesse hat. Diese Entwicklung hatte allerdings auch ihre eigenen Probleme.

Während der Versuch, den Mond- und den Sonnenzyklus miteinander in Einklang zu bringen, bereits nach mehreren Jahren zum Desaster wird, dauert es länger als ein Menschenleben, bis die Probleme des Sonnenkalenders sich deutlich bemerkbar machen.

Wie bereits erwähnt, hat das Sonnenjahr 365,24 Tage. In der Kalenderreform unter Julius Cäsar im Jahre 46 v.Chr. wurde das Sonnenjahr auf 365,25 Tage festgesetzt, was sich im Kalender so ausdrückte, daß nach drei Jahren von 365 Tagen ein Schaltjahr mit 366 Tagen folgte. Die Zahl der Tage in dieser Anordnung decken sich somit alle vier Jahre. Der Mensch hat also den astronomischen Zyklen einen neuen Vierjahreszyklus aufgedrückt. Vom Standpunkt der Gaußschen höheren Arithmetik sind die einzelnen Schaltjahre kongruent zu 0 bezogen auf Modulus 4, gefolgt von den jeweiligen Nichtschaltjahren, die kongruent sind mit 1, 2 oder 3 bezogen auf Modulus 4.

Wie alle Oligarchen, die sich dem Wahn hingeben, ihre Herrschaft werde ewig dauern, negierte Cäsar einfach arrogant die Diskrepanz von etwa 0,01 Tagen zwischen dem von ihm verfügten Jahr und dem tatsächlichen astronomischen Zyklus, die dann auch erst lange nach dem Untergang seines Reiches zutage trat. Eine so minimale Unstimmigkeit fällt natürlich bezogen auf ein Menschenleben kaum ins Gewicht, wohl aber nach mehreren Generationen, denn alle 187 Julianischen Jahre ist das tatsächliche Jahr einen Tag kürzer als im Kalender angegeben. Mitte des 16. Jahrhunderts war diese Diskrepanz auf immerhin 11 Tage angewachsen, so daß das astronomische Ereignis des Frühlingsanfangs bereits am 10. März statt am 21. März stattfand. Auch die wirtschaftlichen Folgen eines solchen Kalenderversagens liegen auf der Hand.

Dieser Umstand führte zu den Kalenderreformen von Papst Gregor XIII. im Jahre 1587. Im Gregorianischen Kalender wird das Schaltjahr in jedem Jahrhundertjahr weggelassen, außer in solchen Jahrhundertjahren, die durch 400 teilbar sind. Auf diese Weise wird die 0,01tägige Diskrepanz zwar vermindert, aber nicht vollständig beseitigt. Um den Jahresablauf wieder mit den Jahreszeiten zu synchronisieren, ließ Papst Gregor im Jahre 1587 11 Tage wegfallen. Andere Länder reformierten ihre Kalender erst viel später und mußten dann um so mehr Tage weglassen, je länger sie warteten. In den protestantischen Gebieten Deutschlands, wo Gauß lebte, wurden die Kalenderreformen Anfang des 18. Jahrhunderts übernommen. In England wurde der Kalender erst 1752 angeglichen. Die Russen warteten gar bis zur bolschewistischen Revolution.

Der andere vom Menschen eingeführte Zyklus, der beim zweiten Schritt unserer Aufgabe eine Rolle spielt, ist die siebentägige Woche. Es gibt keinen astronomischen Zyklus, welcher der siebentägigen Woche entspräche. Im Alten Testament wird zwar der Auszug der Juden aus Ägypten mit den sieben Tagen der Woche, in denen Gott die Welt schuf, in Zusammenhang gebracht, aber Philon von Alexandria warnte in seinen Kommentaren zur Schöpfungsgeschichte davor, dies zu wörtlich zu nehmen. Philon meinte, man müsse sich die Schöpfungsgeschichte mehr als Ordnungsprinzip und nicht als Zeitplan vorstellen.

Wichtig für unser vorliegendes Problem ist eigentlich nur, daß der siebentägige Wochenzyklus kontinuierlich und unabhängig von den Zyklen der Monate (kalendarisch oder lunarisch) und Jahre abläuft. Mit der Woche ist ein neuer Zyklus entstanden, der separat berücksichtigt werden muß. In jedem Jahr fallen die Tage der Woche auf ein anderes Datum. Wenn z.B. der 6. September 1997 ein Samstag war, so wird der 6. September des kommenden Jahres ein Sonntag sein. Nur wenn ein Schaltjahr eingefügt wird, bewegt sich der Kalender zwei Tage nach vorn. Dieses Wechselspiel zwischen siebentägiger Woche und Schaltjahr erzeugt einen 28jährigen Zyklus, nach dessen Ablauf die Tage der Woche und das Kalenderdatum wieder zur Deckung gelangen. Dieser Zyklus muß auch bei Gauß' Berechnung berücksichtigt werden.

Um den letzten Schritt vom Paschalmond bis Ostern zu machen, müssen wir deshalb diese beiden vom Menschen erzeugten Zyklen, das Schaltjahr und die siebentägige Woche, in Eins zusammenbringen.

Bevor wir jedoch fortfahren, wollen wir uns zunächst auf einen wichtigen Grundsatz der höheren Arithmetik zurückbesinnen. Nach Gauß' Kongruenzbegriff gründet sich die Kongruenz auf das Intervall zwischen den Zahlen, nicht auf die Zahlen selbst. Wir beziehen die Zahlen durch ihre Intervalle aufeinander. Wenn wir somit Vielfache des Modulus jeder beliebigen Zahl addieren oder subtrahieren, bleibt die Kongruenz bezogen auf diesen Modulus unverändert. Zum Beispiel ist 15 kongruent mit 1926 bezogen auf den Modulus 7. Das Intervall zwischen 15 und 1926 (1911) ist durch 7 teilbar. Wenn wir z.B. 371 (7 · 53) von 1926 abziehen, ist das Ergebnis nach wie vor mit 15 kongruent. In Vorbereitung auf die folgenden Überlegungen sollte der Leser eigene Experimente mit diesem Konzept anstellen.

Es ist sinnvoll, hier noch einmal Gauß' eigene Berechnungsvorschrift anzuführen:

Es entstehe aus der Division der Rest	mit	
der Jahreszahl	19	a
der Jahreszahl	4	b
der Jahreszahl	7	c
der Zahl 19a+23	30	d

(soweit waren wir oben gekommen)

der Zahl 2b+4c+6d+3	7	E

(das müssen wir noch lösen)

Die Zahl der Tage vom Paschalmond bis Ostersonntag schwankt von mindestens 1 bis höchstens 7 Tage. Da Ostern der erste Sonntag nach dem ersten Vollmond ist, welcher der Frühjahrs-Tagundnachtgleiche folgt, ist das frühestmögliche Datum für Ostern der 22. März. Deshalb fällt Ostern auf den 22. März + d (die Anzahl Tage bis zum Paschalmond) + E (die Anzahl Tage bis Sonntag). E besteht somit aus den Zahlen 0-6 oder den kleinsten positiven Resten von Modulus 7. In Anlehnung an unsere obige Erörterung ist die Anzahl Tage zwischen zwei beliebigen Sonntagen stets durch 7 teilbar, gleichgültig wie viele Wochen dazwischen liegen. Folglich ist auch das Zeitintervall zwischen 22. März + d + E (der Ostersonntag des Jahres, den wir zu bestimmen versuchen) und jedem beliebigen Sonntag irgendeines Vorjahres durch 7 teilbar. Wenn wir also mit einem bestimmten Sonntag beginnen, können wir eine allgemeine Beziehung herausfinden, um daraus das Osterfest zu berechnen.

Gauß wählte Sonntag, den 21. März 1700, als Ausgangsdatum. Als nächstes bestimmte er eine Beziehung dafür, wie viele Tage insgesamt zwischen dem 21. März 1700 und irgendeinem späteren Ostersonntag vergehen. Diese Gesamtzahl wäre 365 Tage mal der Zahl der vergangenen Jahre plus der Zahl von Schalttagen in diesen abgelaufenen Jahren. (Wie wir wissen, hat jedes vierte Jahr einen Schalttag.) Diese Zahl wiederum ist durch 7 teilbar, gleichgültig wie viele Jahre dazwischen liegen.

Wenn A das Jahr ist, für das wir das Osterfest berechnen wollen, ist A - 1700 die Zahl der abgelaufenen Jahre. (Beispiel: Wenn wir das Osterdatum im Jahre 1787 bestimmen wollen, so sind 87 Jahre [1787 - 1700] vergangen.)

Wenn wir die Gesamtzahl von Schalttagen mit i bezeichnen, beträgt die Gesamtzahl von Tagen zwischen Sonntag, dem 21. März 1700, und 22. März + d + E für das fragliche Jahr:

$$1 + d + E + i + 365\,(A - 1700).$$

Die sich ergebende Zahl ist durch 7 teilbar, weil sie die Zahl der zwischen zwei Sonntagen liegenden Tage ist.

Hiermit sind die wichtigsten konzeptionellen Probleme gelöst. Das Osterfest läßt sich somit berechnen als 22. März + d + E, wobei d sich aus der oben besprochenen Berechnung und E aus der noch darzustellenden Berechnung ergibt.

Gauß gab sich nie zufrieden, bis er den absolut einfachsten Weg zum Erreichen seiner Aufgabe gefunden hatte. Wir müssen die obige Berechnung also nur noch soweit vereinfachen, daß E sich als Rest ergibt, wenn die obige Zahl durch 7 geteilt wird. Gauß erreicht dies, indem er wiederholt das Prinzip anwendet, daß sich durch Addition oder Subtraktion von Vielfachen des Modulus die Kongruenz nicht ändert. Ich erwähne die folgende Anwendung dieses Prinzips, obgleich dafür einige algebraische Manipulationen nötig sind. Der Leser sollte sich dabei auf die Addition und Subtraktion von Vielfachen des Modulus 7 konzentrieren.

Um die Zahl der Schalttage i zu berechnen, müssen wir zuerst bestimmen, in welcher Beziehung das fragliche Jahr zum Schaltjahr steht. In der Sprache von Gauß' höherer Arithmetik ausgedrückt: Was ist in dem fraglichen Jahr der kleinste positive Rest bezogen auf Modulus 4? Dies ist der Rest b in Gauß' Berechnung.

(Beispiel: Wenn es sich um das Jahr 1787 handelt, ist der kleinste positive Rest bezogen auf den Modulus 4 3. Das heißt, 1787 ist das dritte Jahr nach einem Schaltjahr. Die Gesamtzahl von Schaltjahren zwischen 1700 und 1787 ist demnach 87-3/4=21 oder 1787-1700-3/4.)

Nach Gauß' Formel beträgt die Gesamtzahl der Schalttage i:

$$1/4\,(A - b - 1700),$$

wenn A zwischen 1700 und 1799 liegt. Wenn A zwischen 1800 und 1899 liegt, müssen wir 1 abziehen, da 1800 kein Schaltjahr ist. Für den Augenblick wollen wir uns aber auf das 18. Jahrhundert beschränken.

Die Gesamtzahl von Tagen zwischen 21. März 1700 und dem Ostersonntag des Jahres A ist:

$$1 + d + E + 365\,(A - 1700) + 1/4\,(A - b - 1700),$$

und diese Zahl muß durch 7 teilbar sein.

Das hört sich überaus kompliziert und umständlich an. Aber wenn wir Vielfache von 7 addieren oder subtrahieren, ist das Ergebnis, wie wir aus Gauß' höherer Arithmetik wissen, stets durch 7 teilbar. Mit Hilfe der folgenden Schritte addiert oder subtrahiert Gauß Vielfache von 7, um diese unhandliche Formel zu einem einfachen Rechenvorgang zu machen.

Zuerst addiert er den Bruch 7/4 (A - b - 1700) zu dem obigen Ausdruck:

$$1 + d + E + 365\,(A - 1700) + 8/4\,(A - b - 1700)$$

Multipliziert man das aus, ergibt sich:

$$1 + d + E + 367\,(A - 1700) - 2b,$$

und weiter:

$$1 + d + E + 367A - 623900 - 2b.$$

Davon subtrahiert Gauß 364 (A - 1700) — was durch 7 teilbar ist — , um

$$d + E + 3A - 5099 - 2b$$

zu erhalten. Dann addiert Gauß 5096 (ebenfalls durch 7 teilbar), um

$$d + E + 3A - 3 - 2b$$

zu bekommen.

Nun eliminiert Gauß die Notwendigkeit eines Bezugsdatums, indem er A folgendermaßen ersetzt. Zunächst teilen wir das Jahr durch 7 und nennen den Rest c. D.h. wenn man c von dem Jahr abzieht, ist das Ergebnis weiter durch 7 teilbar. Oder A-c ist ebenfalls durch 7 teilbar. Im nächsten Schritt subtrahiert Gauß dreimal A-c oder 3A-3c, was

$$d + E + 3c - 3 - 2b$$

ergibt. Schließlich wird dies von 7c-7d abgezogen, was

$$3 + 2b + 4c + 6d - E$$

ergibt. Hieraus ist klar, daß E der Rest sein wird, wenn man

$$3 + 2b + 4c + 6d$$

durch 7 teilt. Somit ist das Osterdatum der 22. März + d + E.