1. TEIL

Bernhard Riemanns „Dirichlet-Prinzip"

In seiner revolutionären *Theorie der Abel'schen Funktionen* von 1857 hat Bernhard Riemann durch eine neue und kühne Anwendung eines Prinzips physikalischer Aktion, das er das „Dirichlet-Prinzip" nannte, die tiefere epistemologische Bedeutung des komplexen Bereichs ans Licht gebracht. Riemanns Ansatz, zusammen mit den in seiner Dissertation von 1854 ausgedrückten Ideen, entfachten nicht nur eine Revolution im wissenschaftlichen Denken, sondern leiteten auch eine Gegenreaktion ein, die genauso heftig war wie die von der venezianisch-britisch kontrollierten empiristischen Schule von Galileo, Newton, Euler und Lagrange zum gleichen Zweck lancierten Verleumdungen gegen Nikolaus von Kues, Kepler, Fermat und Leibniz – eine Gegenreaktion, die bis auf den heutigen Tag anhält und Auswirkungen hat, die weit über den in Riemanns Arbeit von 1857 gesteckten Rahmen hinausreichen. Im Gegensatz zu den dicken Bände, die seit Riemanns Zeit bis heute über dieses Thema geschrieben wurden, zeigt eine aufrichtige geschichtliche Nachprüfung, daß Riemann genauso wie Gauß in seinem gegen Euler, Lagrange und d´Alembert gerichteten Beweis des *Fundamentalsatzes der Algebra* von 1799 recht hatte und seine Kritiker übelwollende Betrüger waren.

Es ist nicht völlig sicher, ob Riemann, als er seine Methode eine Anwendung des „Dirichlet-Prinzips" nannte, solch eine Reaktion schon voraussah, oder ob er lediglich das aussprach, was für jeden im erweiterten Kreis von Abraham Kästners Studenten offensichtlich war. Dennoch ist es erfreulich für uns, daß er sich für diesen Namen entschied, weil sich dadurch nicht nur die wissenschaftlichen Ursprünge von Riemanns Denken, sondern auch der historisch-politische Prozeß, aus welchem es entstand, rekonstruieren lassen.

Auftritt Lejeune Dirichlet

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet war eine Schlüsselfigur in der Wissenschaft am Anfang des 19. Jahrhunderts. 1805 in eine Familie belgischer Herkunft unweit von Aachen hineingeboren, erhielt er seine erste Ausbildung in Köln u.a. bei Georg Simon Ohm, dem Entdecker des Gesetzes über den elektrischen Widerstand. Als 17jähriger fuhr er mit einer Kopie von Gauß' *Disquisitiones Arithmeticae* unterm Arm nach Paris, um am College de France und der Wissenschaftsfakultät mathematische Vorlesungen zu hören. Nach einem Jahr wurde Dirichlet bei General Maximilien Sebastien Foy als Hauslehrer angestellt, einem republikanischen Mitglied der Abgeordnetenkammer, der ihn mit Alexander von Humboldt bekannt machte. Nach Foys Tod 1825 überredete von Humboldt Dirichlet, nach Deutschland zurückzukehren, wurde auf Humboldts Empfehlung 1827 Dozent in Breslau (obwohl er sich weigerte, Latein zu sprechen) und bekam schließlich eine Professur an der Berliner Universität. Dort lernte Dirichlet nicht nur seine zukünftige Frau, Moses Mendelssohns Enkeltochter Rebecca (einer Schwester des Komponisten Felix Mendelssohn — siehe Teil 2) kennen, sondern entwickelte auch eine fruchtbare Zusammenarbeit mit Karl Jacobi und Jakob Steiner, mit denen er sogar auf Anraten Alexander von Humboldts eine gemeinsame Reise nach Italien unternahm.

Bernhard Riemann

1847 kam dann Bernhard Riemann nach Berlin, um bei Dirichlet, Jacobi und Steiner zu studieren, nachdem er die vorigen zwei Studienjahre bei Gauß in Göttingen verbracht hatte. 1849 kehrte er nach Göttingen zurück, um dort sein Studium abzuschließen. 1851 erschien seine unter Gauß' Anleitung geschriebene Doktorarbeit *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* , in welcher er zum ersten Mal sein Prinzip anwendet, ohne allerdings Dirichlet zu erwähnen. Als Gauß 1855 starb, wurde Dirichlet zu dessen Nachfolger berufen, wodurch der Kontakt mit Riemann wiederhergestellt wurde, der erst sieben Monate zuvor mit seiner Habilitationsschrift *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* seine akademische Lehrerlaubnis erhalten hatte. 1857 veröffentlichte Riemann seine *Theorie der Abel'schen Funktionen*, worin er zum ersten Mal das Prinzip, auf welchem seine neuen Theorien gründeten, als "Dirichlet-Prinzip" bezeichnete. Dirichlet starb bereits zwei Jahre später, und Riemann, nun 33 Jahre alt, wurde zu Dirichlets Nachfolger auf den Lehrstuhl von Gauß berufen. Riemann selbst starb nur sieben Jahre später an Tuberkulose.

Das Potential

Was Riemann das „Dirichlet-Prinzip" nannte, erwuchs aus Gauß´ Geodäsie- und Erdmagnetismus-Forschungen, der Anwendung des von ihm entdeckten komplexen Bereichs; erstere entstanden in Zusammenarbeit mit Heinrich Schumacher Anfang 1818, letztere wurden durch Alexander von Humboldt 1832 angeregt. Beide Projekte hatten einen enormen praktischen Nutzen. Aus ihnen entstanden detaillierte Karten ihrer entsprechenden physikalischen Effekte, die für die Infrastrukturentwicklung entscheidend waren. Im Rahmen von Humboldts Projekt entstand zum ersten Mal eine internationale Zusammenarbeit von Wissenschaftlern, die einen generationenlangen Einfluß auf die Entwicklung der physischen Wirtschaft vom amerikanischen Kontinent bis Eurasien haben sollte.

Gauß war aber bewußt, daß beide Projekte tiefere epistemologische Fragen für die Wissenschaft aufwarfen. In seiner *Allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus* schrieb Gauß 1839, daß eine vollständige und exakte Zusammenfassung der Beobachtungen an sich noch kein angemessenes Ziel für die Wissenschaft sei, da „man nur den Grundstein hat, nicht das fertige Gebäude, solange man sich nicht den Erscheinungen des zugrundeliegenden Prinzips widmet". Unter Verweis auf die Astronomie als Beispiel meinte Gauß, es sei nur ein erster Schritt gewesen, die Beobachtungen der scheinbaren Bewegungen der Himmelskörper am Firmament aufzuzeichnen: Erst als das zugrundeliegende Prinzip der

Schwerkraft entdeckt wurde, ließen sich die tatsächlichen Planetenbahnen bestimmen.

Gauß erkannte, daß bei der Geodäsie wie beim Erdmagnetismus der erste Schritt sein mußte, Änderungen der Wirkungen zu untersuchen, die beide Phänomene auf die Meßgeräte ausübten. Im Falle der Geodäsie bedeutete dies Veränderungen in der Richtung eines Lots oder der Horizontalebene, wenn diese Veränderungen auf die Himmelskugel übertragen wird. Beim Geomagnetismus ist dies komplizierter. Hier werden Veränderungen in der Ausrichtung einer Kompaßnadel nach drei Richtungen und der Zeit gemessen. Die Hauptfrage dabei war: Was sind die charakteristischen Eigenschaften des Prinzips der Schwerkraft oder des Geomagnetismus, welche diese scheinbaren Wirkungen hervorrufen? Die spezifische Aufgabe war, wie sich aus diesen infinitesimal kleinen gemessenen Veränderungen in den scheinbaren Effekten eine allgemeine Charakteristik bestimmen ließe.

Diese zweite Frage bringt uns direkter mit dem zusammen, was Riemann das „Dirichlet-Prinzip" nannte. Um jedoch den Zugang zu dem "Dirichlet-Prinzip" zu vereinfachen, ist es von Nutzen, sich zuerst mit dem einfacheren, aber vergleichbaren Beispiel der Kettenlinie zu beschäftigen.

Im Mittelpunkt dieser Diskussion steht die verheerende Kritik von Leibniz und Bernoulli an Galileos und Newtons Darstellung der Kettenlinie. Galileo hatte behauptet, daß alles, was man über die Kettenlinie wissen bräuchte oder könnte, lediglich eine Beschreibung ihrer sichtbaren Form sei. Leibniz und Bernoulli bestanden ihrerseits darauf, daß die Form der Kettenlinie lediglich der sichtbare Effekt eines tieferen physikalischen Prinzips sei, und daß die wahre Form erst durch die Kenntnis dieses Prinzips festgestellt werden könnte. Leibniz und Bernoulli bestimmten das Kennzeichen dieses Prinzips, indem sie zuerst den sich verändernden physikalischen Effekt dieses Prinzips im Unendlichkleinen, und dann durch Umkehrung die allgemeine Charakteristik des Prinzips feststellten. Das Ergebnis war Leibniz' Entdeckung, daß die Gestalt einer hängenden Kette das Prinzip der geringsten Wirkung universeller Schwerkraft widerspiegelt und daß dieser Effekt geometrisch als das arithmetische Mittel zwischen zwei umgekehrten Exponentialfunktionen dargestellt werden kann.

Es muß deutlich hervorgehoben werden, daß wir hier von einer tatsächlich hängenden Kette und nicht von einem rein formalmathematischen Ausdruck sprechen. Beim reinen mathematischen Ausdruck haben die Exponentialkurven keine Begrenzung. Bei der hängenden Kette gibt es sehr wohl eine Begrenzung – die Positionen der Aufhängepunkte nämlich; die spezifische Form der Kette ist somit durch die Positionen der Aufhängepunkte abhängig von Gewicht und Länge der Kette bestimmt. Ändern sich die Positionen der Aufhängepunkte, so verschiebt sich auch jedes Kettenglied entsprechend dieser Abhängigkeit. Mit anderen Worten, wenn sich die Randbedingungen der Kette ändern, so verändert sich der charakteristische Verlauf der Kette entsprechend, *aber die allgemeine Form dieser Bahn bleibt entsprechend dem Prinzip der geringsten Wirkung stets eine Kettenlinie*. Niemals wird sie sich in eine Parabel oder irgendeine andere Kurve verwandeln (siehe *Abbildung 1*).

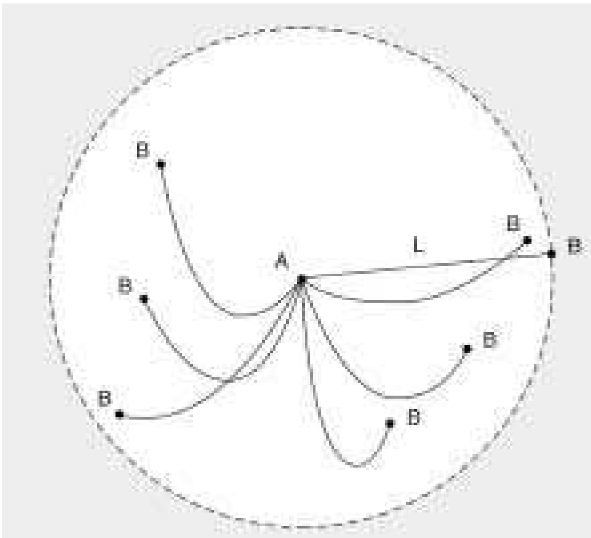

Abbildung 1
Verschiedene Kettenlinien, wie sie durch Positionsveränderungen des Aufhängungspunkt B erzeugt werden.

Dieses Beispiel verdeutlicht einen Aspekt der Methode, die Leibniz ursprünglich *„analysis situs"* nannte (Gauß und Carnot sprachen später von „Geometrie der Lage"), die von grundlegender Bedeutung für das Verständnis von Riemanns „Dirichlet-Prinzip" ist. Die Position der einzelnen Kettenglieder ist eine Funktion der Beziehung zwischen den Randbedingungen (den Positionen der Aufhängepunkte in bezug auf die Länge der Kette) und der charakteristischen Krümmung der Schwerkraft, d.h. sie ist keine Funktion paarweiser Beziehungen zwischen den Gliedern selbst. Anders gesagt, die Position jedes einzelnen Gliedes zu seinen Nachbarn bestimmt sich nicht durch den jeweiligen Abstand nach links oder rechts, nach oben oder unten, wie es Anhänger von Descartes und Newton behaupten. Die Position jedes Gliedes ist vielmehr eine Funktion der gesetzmäßigen Veränderung der physikalischen Wirkung als Ganzer. Jede Änderung der Randbedingungen verändert übereinstimmend mit dem Prinzip der geringsten Wirkung der Kettenlinie auch die Position jedes Kettengliedes *im Ganzen*. Der Effekt, den das unsichtbare physikalische Prinzip im sichtbaren Bereich hat, zeigt sich demnach in der gesetzmäßigen Veränderung, die das Prinzip der geringsten Wirkung verlangt. Hierdurch bestimmen sich die spezifischen Positionen der Glieder. Oder anders ausgedrückt, die *Position* ist eine Funktion der *Veränderung*.

Gauß erkannte, daß die Prinzipien, die Geodäsie und Erdmagnetismus zugrunde liegen, durch eine Erweiterung von Leibnizens Methode verstanden werden können. Er lehnte Newtons allgemein anerkannte, aber nachweisbar falsche Methode ab, welche diese Phänomene als paarweise Wechselwirkung fester Körper zu erklären suchte. Statt dessen forderte Gauß, daß diese Phänomene genau wie bei der Kettenlinie als einheitlicher Prozeß begriffen werden müßten, wonach die jeweiligen Veränderungen in der Position des Lots oder der Kompaßnadel eine Funktion des Prinzips seien, welches das Gesamtphänomen bestimmt. Dieses Ganze nannte Gauß „das Potential", das lateinische Äquivalent zum griechischen „*dynamis*" oder zu Leibnizens „*Kraft*" (oder dem lateinischen „*vis viva*"). Gauß entwickelte die Idee einer „Potentialfunktion", um den Effekt des Prinzips der geringsten Wirkung auf eine Fläche oder ein Volumen in ähnlicher, jedoch erweiterter Weise anwenden zu können, wie Leibniz die Krümmung der hängenden Kette verwendet hatte, um den Effekt der Gravitation darzustellen. Hierzu dehnte Gauß Leibnizens Idee der Funktion auf den komplexen Bereich aus.

Leibnizens Funktionen – die einen bestimmten minimalen Weg kennzeichnen

Abbildung 2
Ein Seifenfilm bildet ein Katenoide zwischen zwei Ringen.

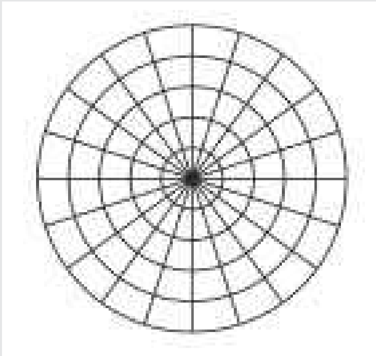

Abbildung 3
Eine harmonische Reihe von Kreisen und Radiallinien.

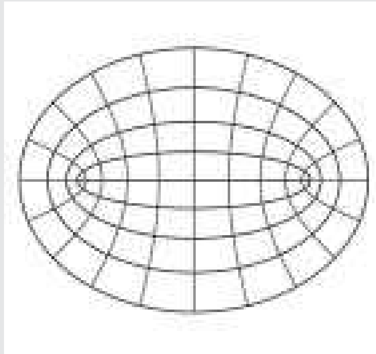

Abbildung 4
Eine harmonische Reihe von Ellipsen und Hyperbeln.

– wurden so in Gauß' „Potentialfunktion“ verwandelt, die eine ganze Klasse minimaler Wege darstellen: eine Funktion von Funktionen. Oder anders ausgedrückt, wenn man sich Leibnizens Kettenlinie als den minimalen Weg vorstellt, der durch eine Reihe zweier Funktionen bestimmt ist, dann bedeutet Gauß´ Potentialfunktion einen weiteren Schritt, durch den eine Funktion zwei (oder mehrere) *Funktionenreihen* in sich vereinigt. Riemann zeigte später, daß diese Reihen minimaler Wege implizit minimale Oberflächen definieren, so wie sich beispielsweise eine aus Seifenfilm bestehende Katenoide zwischen zwei kreisförmigen Ringen ausbildet (siehe *Abbildung* 2).

Diese Funktionenreihen sind nicht willkürlich. Sie sind durch eine spezielle Beziehung miteinander verknüpft und werden beschreibend als “sphärische“ oder „harmonische“ Funktionen bezeichnet. Eine sphärische oder harmonische Funktion ist eine Reihe orthogonaler Funktionen, deren Krümmungen sich alle im selben Maße ändern.

Dies läßt sich anhand einiger geometrischer Beispiele einfach darstellen. Eine Reihe konzentrischer Kreise und Radiallinien bildet eine harmonische Funktion, weil sich die Kreise und Radiuslinien jeweils orthogonal kreuzen und beide eine konstante Krümmung haben (siehe *Abbildung 3*). Ein noch anschaulicheres Beispiel ist eine Reihe sich orthogonal kreuzender Ellipsen und Hyperbeln (siehe *Abbildung 4*). Um ein Gespür für deren harmonische Beziehung zu bekommen, stelle man sich folgendes vor: Jede Ellipse steht mit einer konfokalen orthogonalen Hyperbel in Verbindung. Ausgehend von dem Punkt, wo beide Kurven die Achse berühren, stelle man sich im Geist einen gleichzeitig auf beiden Kurven stattfindenden Ablauf vor (siehe *Abbildung 5*). Man beachte, daß, je mehr die Krümmung der Hyperbel abnimmt, auch die Krümmung der dazugehörigen Ellipse abnimmt, und dies gleich schnell.

Harmonische Funktionen setzen also zwei unterschiedliche Kurvenreihen so miteinander in Beziehung, daß die Veränderungsrate ihrer jeweiligen Krümmungen immer gleich bleibt. (Diese Beziehung ließe sich mit Hilfe des Leibnizschen Calculus genau ausrechnen, aber ein intuitives Verständnis ist vorerst ausreichend.)

Außerdem müssen die Reihen harmonischer Funktionen nicht notwendigerweise aus bekannten Kurven bestehen, wie z.B. Kreisen, Linien, Ellipsen oder Hyperbeln. Selbst äußerst komplizierte Funktionenreihen können harmonisch sein (siehe *Abbildung 6*).

Im Gegensatz dazu ist eine Reihe von Kreisen und Hyperbeln nicht harmonisch, weil die Krümmung der Kreise zwar konstant ist, sich die der Hyperbeln aber verändert. Folglich sind auch ihre Kurvenreihen nicht orthogonal zueinander (siehe *Abbildung 7*).

Gauß erkannte, daß Leibniz' Prinzip der geringsten Wirkung in bezug auf Flächen und Volumina, die bei Phänomenen wie der Erdanziehung und dem Magnetismus auftreten, durch harmonische Funktionen ausgedrückt werden können. Eine Kurvenreihe harmonischer Funktio-

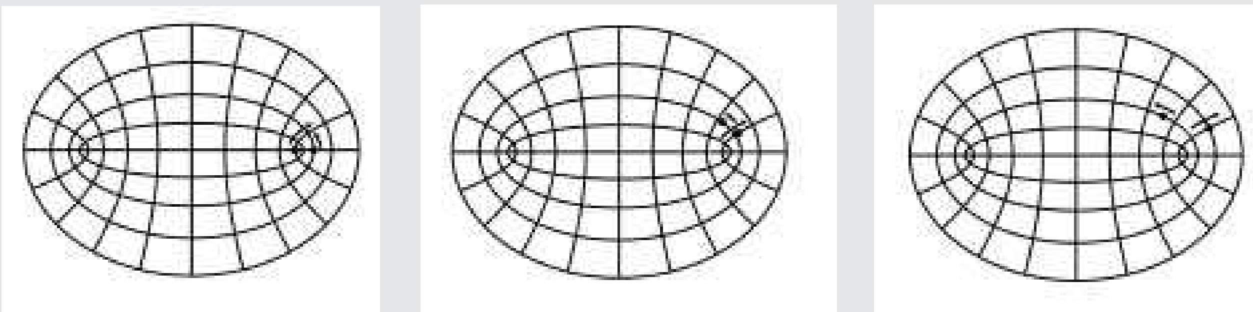

Abbildung 5
Die Krümmung zusammengehöriger orthogonaler Ellipsen und Hyperbeln ändert sich stets in gleichem Maße.

nen drückt die Wege kleinster Veränderung im Aktionspotential aus, während die andere Reihe orthogonaler Kurven die Wege größtmöglicher Veränderung im Aktionspotential ausdrückt. Wenn die Erde eine perfekte Kugel wäre, ließe sich ihr kleinst- und größtmögliches Aktionspotential durch eine Reihe konzentrischer Kugelschalen und orthogonaler Flächen darstellen. Im Querschnitt ergäbe sich dabei eine harmonische Beziehung von Kreisen und Radiallinien. Wäre die Erde hingegen ein exaktes Ellipsoid, ließe sich ihr Potential durch eine Reihe dreifach aufeinander senkrecht stehender Ellipsoide und Hyperboloide ausdrücken, deren Querschnitt eine harmonisch miteinander verbundene Reihe von Ellipsen und Hyperbeln ergäbe (siehe auch *Abbildung 4*).

Doch wie Gauß feststellte, ist die Form der Erde, was Gravitation und Magnetismus angeht, viel komplizierter als eine Kugel oder ein Ellipsoid, und die Bahnen des kleinst- und größtmöglichen Aktionspotentials sind nicht so einfache und bekannte Kurven wie Kreise, Linien, Ellipsen oder Hyperbeln. Es muß also eine komplexere harmonische Funktion gefunden werden, um diese Prinzipien auszudrücken. Solch eine Funktion ließ sich aber nicht *a priori* bestimmen, sondern mußte von den gemessenen Veränderungen in den Gravitations- oder Erdmagnetismus-Effekten abgeleitet werden.

Für Gauß stellte sich die Frage: Wie läßt sich anhand der winzig kleinen gemessenen Potentialveränderungen, die er durch seine geodätischen und magnetischen Messungen erhalten hatte, die wahre physikalische Form der Erde oder die Gesetzmäßigkeit des Erdmagnetismus bestimmen?

Damit kommen wir dem, was Riemann das „Dirichlet-Prinzip" nannte, schon näher.

Es ist recht kompliziert, die Erdoberfläche oder die Magnetwirkungen so genau zu bestimmen, wie Gauß es tat, doch das Prinzip, auf welchem seine Methode basierte, liegt innerhalb des Rahmens dieser pädagogischen Übung. Wenn man wie Gauß erkennt, daß Veränderungen der Lotrichtung Meßveränderungen in Richtung der Potentialfunktion entsprechen, dann läßt sich daraus ableiten, daß die physische Form der Erde das gleiche Verhältnis zu diesem Potential hat wie die Aufhängepunkte zur Kettenlinie. Anders ausgedrückt ist die Erdoberfläche lediglich als Grenze des Potentials zu verstehen, oder, wie Gauß es formulierte: „Die physische Oberfläche der Erde ist geometrisch gesehen die Fläche, die überall senkrecht zur Zugrichtung der Schwerkraft verläuft".

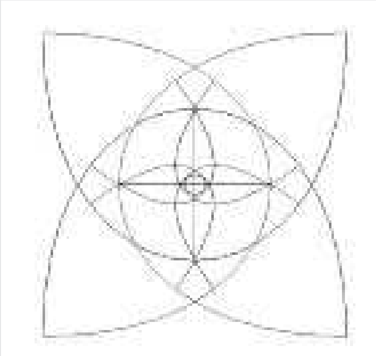

Abbildung 6
Eine harmonische Reihe kubischer Kurven

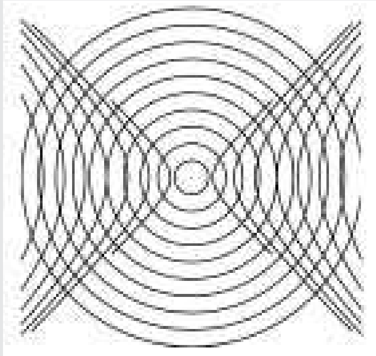

Abbildung 7
Eine nichtharmonische Reihe von Kreisen und Hyperbeln.

Ein Verweis auf das alte pythagoräische Problem der Verdoppelung der Linie, des Quadrats oder des Würfels kann ein wenig Licht auf diese Idee werfen. Die Linie ist durch Punkte begrenzt, das Quadrat durch Linien und der Würfel durch Quadrate. Größe und Position dieser Grenzen werden durch die Länge, die Fläche oder das Volumen bestimmt, das sie einschließen. Beispielsweise bestimmt das Quadrat die Größe und die Position seiner Seiten, selbst wenn man die letzteren sieht, das erstere aber nicht. Die Seiten des Quadrats sind zwar Linien, aber diese werden durch eine andere Kraft (Potential) erzeugt als Linien, die von anderen Linien erzeugt werden. In gleicher Weise werden Größe und Position der Quadrate, die die Grenzen eines Würfels bilden, von einer anderen Kraft (Potential) erzeugt als die Quadrate, die durch die Diagonale eines anderen Quadrates zustande kommen. Obwohl man also die Kraft nicht sehen kann, läßt sie sich durch ihre charakteristische Wirkung auf die Grenzen ihrer Aktion messen.

Wenden wir nun die gleiche Denkmethode auf die oben angesprochenen physikalischen Prinzipien an. Die Kettenlinie ist eine Kurve, deren Grenzen Punkte sind. Eine Katenoide ist eine Fläche, deren Grenzen Kurven sind. Die Erdoberfläche ist die Grenze eines Gravitationsvolumens. Das Magnetfeld der Erde ist sogar noch komplizierter und muß an anderer Stelle besprochen werden.

Diese miteinander verknüpfte Beziehung zwischen den Randbedingungen eines physikalischen Prozesses und dem Effekt des Prinzips der geringsten Wirkung in bezug auf diesen physikalischen Prozeß ist die Beziehung, die Riemann als „Dirichlet-Prinzip" bezeichnet.

Von Gauß über Dirichlet zu Riemann

Nachdem Dirichlet 1855 die Stelle von Gauß in Göttingen übernommen hatte, begann er Vorlesungen über Gauß' Potentialtheorie zu halten, während Riemann an seiner *Theorie der Abel'schen Funktionen* arbeitete. Gauß, Dirichlet und Riemann hatten alle erkannt, daß komplexe Funktionen als Erweiterung von Leibnizens Konzeption der Kettenlinie und der natürlichen Logarithmen bestens geeignet waren, die Bahnen geringster Wirkung von Potentialfunktionen auszudrücken.

Gauß hatte dies schon 1799 in seinem Beweis des *Fundamentalsatzes der Algebra* dargelegt, worin er zeigte, daß ein komplexer algebraischer Ausdruck zwei Flächen erzeugt, deren Krümmungen harmonisch miteinander in Beziehung stehen. Was Riemann Dirichlet zuschrieb, war die Entdeckung des Prinzips, daß eine Funktion, welche die Aktion innerhalb einer bestimmten Randbedingung minimiert, eine komplexe harmonische Funktion ist.

Man kann sich dieser Idee über das bekanntere Gebiet der Kettenlinie nähern. Die Randbedingungen sind hier die Positionen der Aufhängepunkte. Der „Innenbereich" innerhalb dieser Grenzen ist die Kurve selbst. Im Verlauf der Kurve gibt es eine singuläre Stelle – den tiefsten Punkt. Wenn sich die Rahmenbedingungen durch Positionsverschiebungen der Aufhängepunkte ändern, dann verändert sich auch die Position des tiefsten Punktes. Um nun Dirichlets Prinzip innerhalb dieses vereinfachten Kontexts zu veranschaulichen, stellt die Kettenlinie die

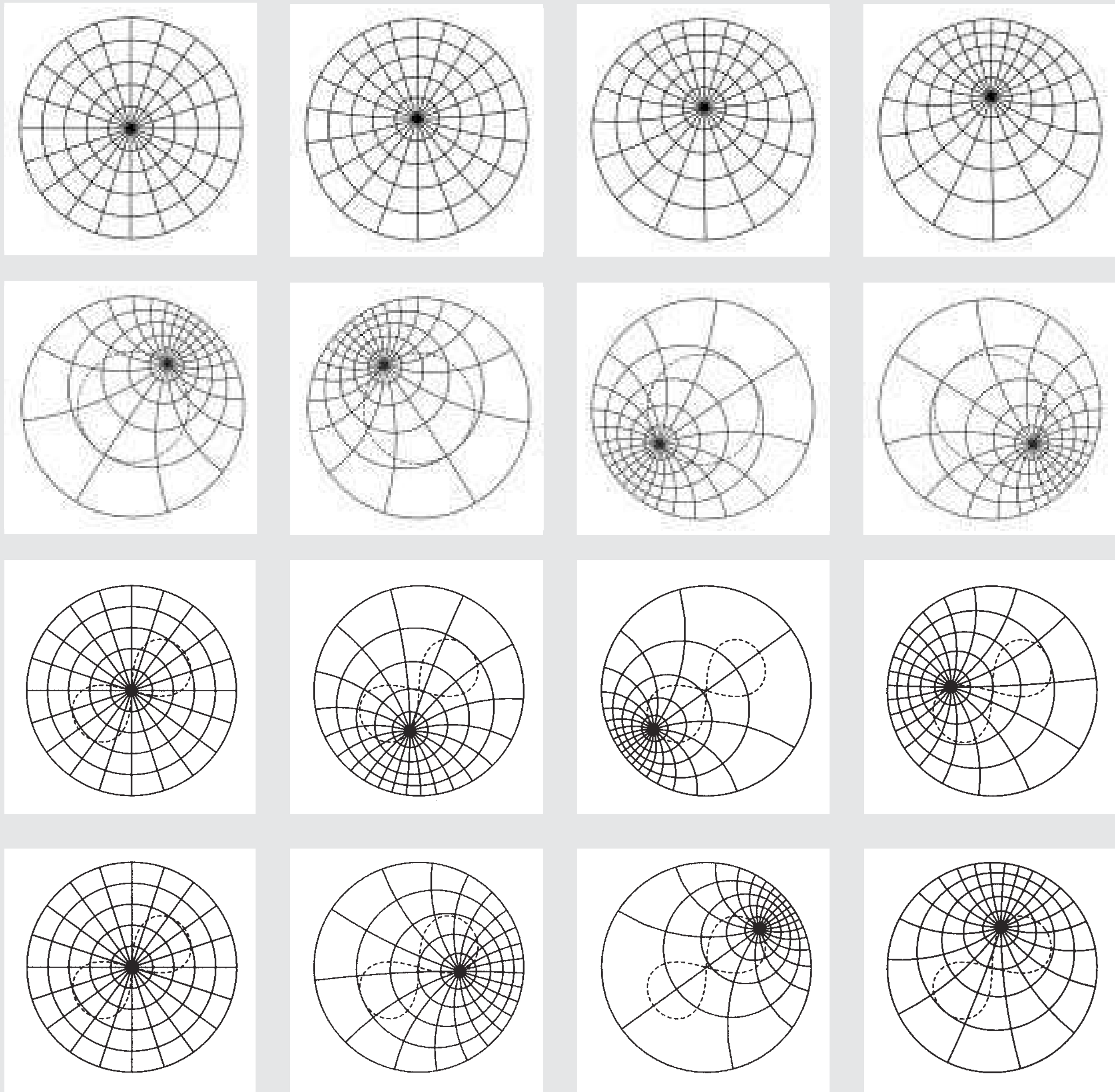

Abbildung 8
Transformation harmonischer Reihen von Kreisen und Radiallinien. (a) Der Schnittpunkt der Radiallinien bewegt sich auf einer geraden Linie nach oben. (b) Der Schnittpunkt der Radiallinien bewegt sich auf einem Kreis. (c) Der Schnittpunkt der Radiallinien bewegt sich auf der Bahn einer Lemniskate.

Bahn der geringsten Wirkung einer hängenden Kette mit den entsprechend festgelegten Randbedingungen und der Singularität dar. Wenn sich die Rahmenbedingungen verändern, verändert sich dementsprechend auch die Form der Kurve, wobei das Prinzip der geringsten Wirkung selbstverständlich erhalten bleibt.

Riemann kehrte das Prinzip von Dirichlet um: *Weil das physikalische Prinzip der geringsten Wirkung primär ist, wird die Form der Kette vollkommen durch die Positionen der Aufhängepunkte und des tiefsten Punktes bestimmt!*

Übertragen wir diese Untersuchung nun auf eine Katenoide, die durch einen zwischen zwei Ringen aufgespannten Seifenfilm gebildet wird. Diese Katenoide ist eine minimale Fläche bzw. eine Fläche der geringsten Wirkung. In diese Fläche eingebettet ist eine Reihe orthogonaler Kurven minimaler und maximaler Aktion. (Riemann zeigte später, daß diese Kurven harmonisch miteinander in Beziehung stehen.) Verändert man im Experiment die Form der Begrenzung (der Kreisringe) z.B. in Ellipsen, in unregelmäßige, glatte Formen oder in Vielecke, stellt man fest, daß sich entsprechend auch die Gestalt der Fläche und die eingebetteten Kurven verwandeln, aber das Prinzip der geringsten Wirkung erhalten bleibt.

Es ist hilfreich, diese Idee durch einige andere pädagogische Beispiele zu verallgemeinern, die in den folgenden computererzeugten Bildern dargestellt sind. In *Abbildung 8* ist eine Reihe harmonisch miteinander verknüpfter Kreise und Radiallinien dargestellt, die sich im Kreismittelpunkt schneiden, bei ihrer Verwandlung aber die harmonische Bezie-

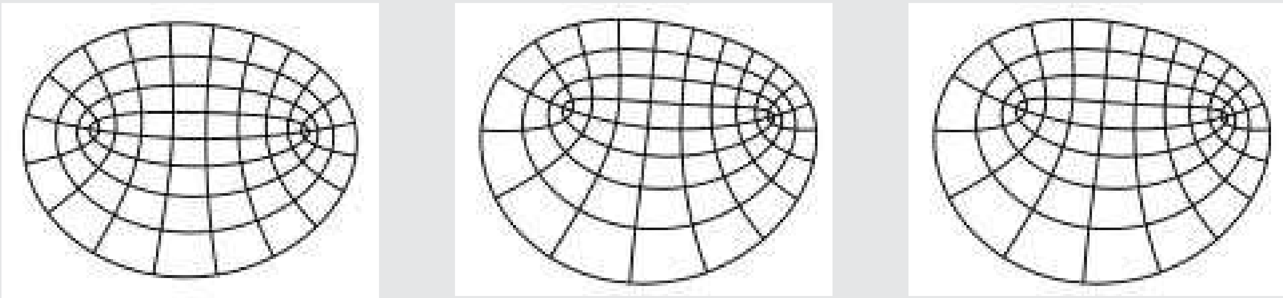

Abbildung 9
Die Brennpunkte harmonisch verwandter Ellipsen und Hyperbeln bewegen sich auf der Bahn eines Kreises.

hung beibehalten. Wird die Position des Schnittpunktes verschoben, müssen die Radiallinien zu Kreisbögen werden, und ihre Endpunkte bewegen sich auf dem Grenzbereich, um ihre harmonische Beziehung beizubehalten. Dieser Effekt wird in unterschiedlichen Positionen des Schnittpunktes dargestellt; zunächst vom Mittelpunkt weg (*Abbildung 8a*), dann in einer Kreisbewegung um das Zentrum (*Abbildung 8b*) und schließlich entlang einer Lemniskate um den Mittelpunkt (*Abbildung 8c*). Diese Bewegung führt dazu, daß sich alle Positionen innerhalb der Grenze *als Ganzes* verändern. Was sich nicht verändert, ist die harmonische Beziehung, d.h. das Prinzip der geringsten Wirkung.

Dies läßt sich auch umgekehrt denken: Die Positionsveränderungen des Schnitts der Radiallinien an der Grenze lassen ihren Schnittpunkt auf einem Kreisbogen wandern und ihre Form von Linien zu Kreisbögen werden.

Oder, infinitesimal kleine Krümmungsänderungen der Bahnen bestimmen sich durch die Bedingungen an der Grenze in Abhängigkeit von der Position der Singularität.

Man vergleiche diesen Vorgang mit der Positionsänderung des tiefsten Punktes der Kettenlinie, wenn sich die Positionen der Aufhängepunkte verändern, wie in *Abbildung* 1 dargestellt.

Dort erzeugte eine Änderung an den Grenzpunkten eine Veränderung entlang einer Einzelkurve. Hier erzeugt eine Änderung in der Grenzkurve eine Veränderung in einer Reihe harmonisch miteinander verbundener Kurven innerhalb einer Fläche.

Mit dem gleichen Problem sah sich Gauß konfrontiert, als er die Lage der magnetischen Erdpole aus infinitesimal kleinen Veränderungen im magnetischen Effekt der Erde bestimmen wollte. Gauß verstand, daß diese kleinen Veränderungen mit den Positionen der Singularitäten des Erdmagnetfelds, nämlich den magnetischen Polen, zusammenhängen. Immerhin waren die genaue Lage und selbst die Anzahl dieser Pole zur Zeit von Gauß immer noch unbekannt. Auf Grundlage von Messungen, die er über von Humboldts Netzwerk erhielt, bestimmte Gauß, wo sich diese Pole befinden mußten. Die berühmte amerikanische Wilkes-Expedition von 1837 wurde u.a. deshalb begonnen, um Gauß' Entdeckungen zu bestätigen, was sie auch tat.

In *Abbildung 9* ist der gleiche Effekt dargestellt, wobei hier die beiden Brennpunkte dem Weg eines Kreises folgen. Auch hierbei ist wieder zu erkennen, wie die Änderung in der Position der Singularität die Bedingung an der Grenze verändern, so daß alle daraus resultierenden Beziehungen harmonisch bleiben.

Abbildung 10 zeigt den gleichen Prozeß, nur hat die Grenze die Gestalt einer Ellipse angenommen, was den orthogonalen Kurven entsprechend die Form von Hyperbeln verleiht und den Schnittpunkt in zwei Brennpunkte umwandelt. Man könnte natürlich genauso sagen, die Radiallinien hätten sich in Hyperbeln verwandelt, wodurch die Kreise zu Ellipsen wurden und der Schnittpunkt zu zwei Brennpunkten. Oder der Schnittpunkt sei zu zwei Brennpunkten geworden, wodurch sich die Grenze zu einer Ellipse und die Radiuslinien zu Hyperbeln verwandelten.

Kurz, *ein physikalischer Prozeß geringster Wirkung ist eine verknüpfte Aktion. Verändert sich irgendein Aspekt dieses Prozesses, ändert sich alles andere entsprechend mit, um die Charakteristik der geringsten Wirkung des Prozesses aufrechtzuerhalten. Das physikalische Prinzip der geringsten Wirkung ist demnach das entscheidende.*

Es bedurfte Riemanns Genie, um durch die Anwendung des „Dirichlet-Prinzips" zu erkennen, daß das Prinzip der geringsten Wirkung eines physikalischen Prozesses vollständig durch die Beziehung zwischen den Randbedingungen und den Singularitäten verstanden werden kann und daß sich diese Beziehung einzigartig durch Riemanns geometrisches Konzept der komplexen Funktionen ausdrücken läßt. Darüber hinaus zeigte Riemann, daß sich die Charakteristik der geringsten Wirkung eines physikalischen Prozesses grundsätzlich nur durch das Hinzufügen eines neuen Prinzips ändern läßt. Dieser Prinzipienwechsel wird in einer komplexen Funktion durch eine entsprechende Zunahme in der Anzahl von Singularitäten ausgedrückt. In seiner *Theorie der Abel´schen Funktionen* veranschaulicht Riemann dies, indem er das „Dirichlet-Prinzip" auf die höheren, transzendentalen Funktionen Abels anwendet.

Die tiefere Bedeutung dieser Entdeckung kann hier nur angedeutet. Die Animation in *Abbildung 11,* die das Prinzip der geringsten Wirkung bei einer elliptischen Funktion ausdrückt, dient hier als Ansatz. Riemann bewies, daß alle elliptischen Funktionen, d.h. Funktionen, die durch die Wechselwirkung zweier miteinander verknüpfter Prinzipien gebildet werden, im komplexen Bereich als Flächen mit zwei Grenzen ausgedrückt werden (siehe www.wlym.com, Rubrik "pedagogicals", part 58). Jede Grenze ändert sich unterschiedlich, jedoch stets voneinander abhängig, was entsprechende Änderungen in den minimalen Bahnen nach sich zieht, während die harmonische Gesamtstruktur der Funktion aber zu jeder Zeit bestehen bleibt. Anders ausgedrückt, in diesem Fall wird die charakteristische Krümmung dieser Bahnen der geringsten Wirkung durch die verknüpfte Wechselwirkung zweier Prinzipien bestimmt.

Ein Vergleich dieses Beispiels mit den vorigen verdeutlicht, was Riemann betonte: Der einzige Weg, die Eigenschaft der Aktion eines physikalischen Prozesses grundlegend zu verändern, ist das Hinzufügen der Aktion eines neuen Prinzips.

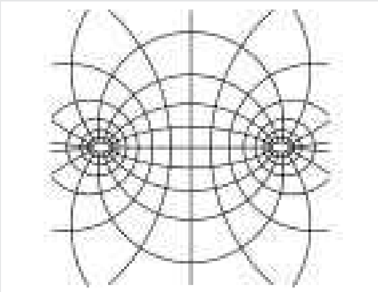

Abbildung 10
Eine Reihe doppelt periodischer harmonischer Kurven, wie sie für harmonische Funktionen typisch sind. Die Kurven hier sind harmonisch in bezug auf zwei Grenzbedingungen.

Ein Beispiel aus der Wirtschaftswissenschaft kann dieses Prinzip weiter erhellen helfen: Wo liegt die Verknüpfung zwischen sämtlichen realwirtschaftlichen Beziehungen einerseits und den wirtschaftlichen Rahmenbedingungen der physischen Infrastruktur und der kulturellen Entwicklung andererseits? Was ist die Beziehung dieser Rahmenbedingungen zu den Singularitäten bei der Einführung neuer Technologien? Wie wirkt sich eine Veränderung, sei sie nun positiv oder negativ, auf alle wirtschaftlichen Beziehungen innerhalb dieser realwirtschaftlichen Rahmenbedingungen aus?

Vier Jahre nach Riemanns Tod kritisierte Karl Weierstraß Riemanns Anwendung des „Dirichlet-Prinzips“ aus formal-mathematischem Gründen. Weierstraß behauptete, es sei unangebracht, mathematisch von einer geringsten Wirkung zu sprechen, ohne formal-mathematisch bewiesen zu haben, daß ein mathematisches Minimum bzw. Maximum tatsächlich existiere. Es ist zwar möglich, ein formal-mathematisches Beispiel anzuführen, welches kein Minimum hat, doch alle *physikalischen* Prozesse sind durch das Prinzip der geringsten Wirkung mit entsprechenden Grenzbedingungen gekennzeichnet. Nikolaus von Kues zeigte zum Beispiel, daß es kein größtes oder kleinstes Vieleck geben kann, weil das Vieleck in maximaler Richtung durch einen Kreis (welcher kein Vieleck ist) und in minimaler Richtung durch eine Linie (welche ebenfalls kein Vieleck ist) begrenzt wird. Oder, eine mathematische Kettenlinie läßt sich zwar bis ins Unendliche erweitern, aber die physikalische Kettenlinie ist immer durch die Aufhängepunkte begrenzt. Für Riemann, wie auch für Gauß und Dirichlet, war die Forderung von Weierstraß nach einem formal-mathematischen Beweis eines Minimums weniger als unnötig: sie war Sophisterei. Das universelle physikalische Prinzip der geringsten Wirkung genügte als Beweis völlig aus.

Die verzweifelten Formalisten stürzten sich auf Weierstraß’ Kritik, um die Errungenschaften von Kästner, Gauß, Dirichlet, Jakobi, Abel, Riemann u.a. für nichtig zu erklären und die Wissenschaft in die geistigen Sklavenzeiten von Euler, Lagrange und D´Alembert zurückzuführen. Während in der Folge zwar die *Form* der Riemannschen Entdeckungen weithin diskutiert wurde, gelang es, die *Substanz* seines Denkansatzes weitgehend zu unterdrücken, bis sie durch die Entdeckungen von Lyndon LaRouche wieder zu neuem Leben erweckt und weiterentwickelt wurde.

Bruce Director

Abbildung 11
Beide Grenzbedingungen einer Reihe doppelt periodischer harmonischer Kurven erleben eine Transformation.