Über die Leidenschaft der Erkenntnis und die Konstanten der Natur

FOLGE 3: DIE BEDEUTUNG DES DREIECKS

In diesem Jahr wird der 600. Geburtstag des Renaissancekardinals und Begründers der modernen Naturwissenschaften Nikolaus von Kues (1401-64) gefeiert. Caroline Hartmann inspirierte dies zu einer neuen Geometrieserie. In den ersten beiden Folgen ging es um die Berechnung der für alle Kreise konstanten Beziehung zwischen ihrem Umfang und Durchmesser, zuerst durch die alten Ägypter und dann durch Archimedes. Beide stellten den Kardinal jedoch nicht zufrieden...

Ausgehend von der Erkenntnis, daß die Konstanten in der Natur nicht nur „Zahlenwerte“ sind, sondern vielmehr die geheimnisvollen „Rahmenbedingungen“ der Geometrie unseres Universums offenbaren, hatten wir uns an die Untersuchung gewagt, *warum* denn zwischen Umfang und Durchmesser aller Kreise eine konstante Beziehung herrsche. Wir hatten gesehen, wie die Ägypter aus eher „praktischem“ Interesse einen Näherungswert für π ausgerechnet hatten und wie der Grieche Archimedes das Problem angegangen war. Aber mit Nikolaus Cusanus hatten wir festgestellt, daß wir auf diesem Wege ohne Antwort bleiben würden: Weder durch eine rechnerische Prozedur (die nicht nach Gründen fragt) wie bei den Ägyptern noch durch die immer größere Annäherung an den Kreisumfang durch Konstruktion in- und umgeschriebener Vielecke mit immer mehr Ecken, wie Archimedes es vorschlug, erreichen wir jemals eine Antwort auf unser „Warum?“.

Wie man weiß, reicht es heute leider vielen, einfach auf den Taschenrechner zu drücken und nicht groß zu fragen. Doch Fragen stellen ist, ehrlich gesagt, viel interessanter, denn dadurch eröffnen sich sonst unbeachtete Zusammenhänge, die oft an anderen Punkten unseres Lebens als unüberwindliche Paradoxa wieder auftauchen.

Bei dieser Untersuchung ging es im Prinzip darum, den krummen Kreis mit einer geraden Linie zu vergleichen. Nikolaus von Kues hatte schon erkannt, daß wir solche Widersprüche „nicht auf dem Wege des formalen Denkens“ vereinigen können, „da wir nur durch das, was uns von Natur einsichtig ist, voranschreiten...“

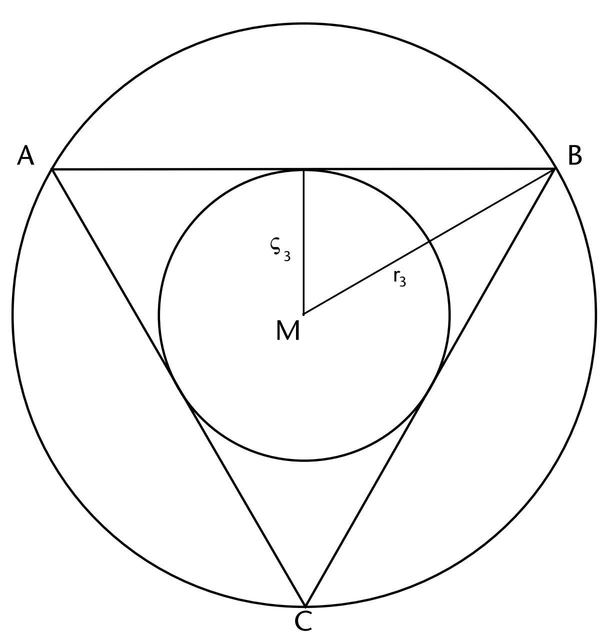
Aber wenn nicht auf dem Wege des Denkens, wie denn sonst? Der Cusaner hatte eine andere Idee, man könnte es fast als ein geometrisches Spiel betrachten: Er beginnt seine Untersuchungen nämlich nicht mit irgendeinem Kreis, sondern betrachtet den *Prozeß*, der — ausgehend vom Dreieck ABC und seinem In- und Umkreis — zum Auffinden des zum Dreieck isoperimetrischen Kreises führt. Dies ist der Kreis mit dem gleichen Umfang wie das Dreieck, von dem die Untersuchung ausgeht (siehe *Abbildung 1*).

Irgendwo in dem großen freien Zwischenraum zwischen Inkreis und Umkreis des Dreiecks muß der isoperimetrische Kreis liegen. Aber wo, und warum überhaupt dort? Dies wollen wir im folgenden untersuchen. Doch hören wir zuerst Nikolaus' Idee:

„Nach fast zahllosen Ansätzen, mit denen ich mich mühte (allerdings immer vergeblich), zu der vorgesetzten Kunst zu gelangen, hat sich mir durch den Rückgriff auf das in meiner Schrift über die wissende Unwissenheit angewendete Prinzip endlich ein Weg aufgetan. Die Kunst, die ich suche, leistet außer dem in der Geometrie schon Überlieferten die Verwandlung des Gekrümmten in das Gerade und des Geraden in das Gekrümmte. Da zwischen diesen Größen kein rationales Verhältnis bestehen kann, muß sich das Geheimnis hier in einer Koinzidenz der Extreme verbergen. Da diese Koinzidenz im Maximum statthat (wie anderweitig dargetan wird) und das Maximum der unbekannte Kreis ist, wird hier gezeigt, daß sie im Minimum — das ist das Dreieck — aufgesucht werden muß.“

(„De geometricis transmutationibus“, *Von den geometrischen Verwandlungen*)

Abbildung 1



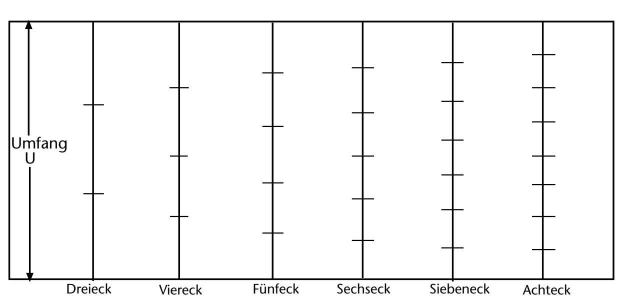
Nikolaus betrachtete als erstes das Dreieck mit seinem In- und Umkreis. Dann begann er die Suche nach dem zum Dreieck isoperimetrischen Kreis.

Betrachten wir nun das Dreieck ABC. Ein Dreieck ist offensichtlich das kleinste aller Vielecke, denn wenn man eine Ecke wegnehmen will, was bleibt übrig? Auf dem *Umkreis* liegen die drei Ecken des Dreiecks, auf seinem *Inkreis* liegen die Mittelpunkte der Dreieckseiten. Der Radius des Inkreises ς_3 ist also die Strecke vom Mittelpunkt M des Kreises zur Seitenmitte des Dreiecks, der Radius r_3 des Umkreises dagegen die Strecke vom Mittelpunkt M zu einer der Ecken A, B oder C.

Nun geht es darum, den zu diesem Dreieck isoperimetrischen, d.h. umfangsgleichen Kreis zu finden. Wie groß wird er wohl sein? Wissen wir eigentlich mit Sicherheit, daß er zwischen In- und Umkreis des Dreiecks zu finden sein wird?

Nikolaus konstruiert nun eine Reihe von Vielecken, die alle den gleichen Umfang haben sollen. Dieser Umfang muß sich nun beim Viereck, Fünfeck, Sechseck usw. auf immer mehr Seiten „verteilen“. Wir können uns dies bildlich vorstellen, wenn wir uns zwei parallele waagerechte Linien zeichnen, deren Abstand dem Umfang entsprechen soll. Dann zeichnen wir einige senkrechte Verbindungslinien ein, auf denen wir die jeweilige Aufteilung des Umfangs in die Zahl der Vieleckseiten markieren (*Abbildung 2*).

Abbildung 2

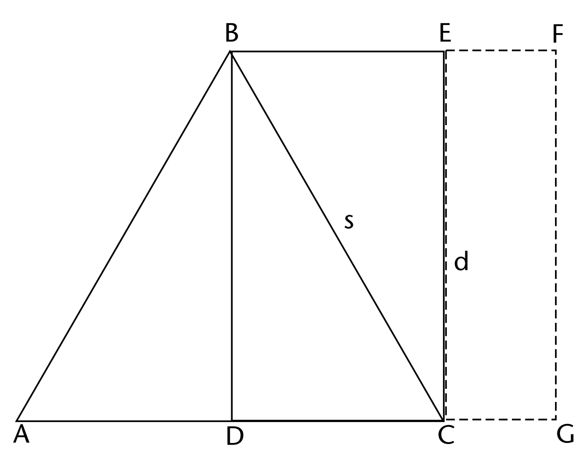


Bei isoperimetrischen Vielecken ist der Umfang immer gleich. Er muß also bei größer werdender Eckenzahl auf immer mehr – hier gleich lange – Seiten aufgeteilt werden.

Der Umfang wird in immer mehr und immer kürzere Seiten aufgeteilt. Was bedeutet das für die Fläche der Vielecke? Wird deren Fläche größer oder kleiner?

Der englische Gelehrte Thomas Bradwardine (1390?-1448, sein Geburtsdatum ist nicht mehr zu ermitteln), von dem Nikolaus Cusanus viele geometrische Überlieferungen der Alten gelernt hat und den er ausgiebig studierte, zeigte, daß geometrische Vielecke, die den gleichen Umfang besitzen, mit zunehmender Seiten- bzw. Eckenzahl an Fläche zunehmen. Betrachten wir ein gleichseitiges Dreieck ABC und das dazu flächengleiche Rechteck BDCE (*Abbildung 3*).

Abbildung 3



Das Rechteck BFGD mit dem gleichen Umfang wie das Dreieck ABC hat eine größere Fläche als dieses.

Die Flächengleichheit ist leicht erkennbar, da das Rechteck aus zwei ebensolchen rechtwinkligen Dreiecken zusammengesetzt ist wie das Dreieck. Der Umfang dieses Rechtecks ist offenbar kleiner als der des Dreiecks, denn wenn man die Länge der einzelnen Seiten addiert, so kommen wir beim Dreieck auf $U_3 = s + s + s = 3s$, wobei U_3 den Umfang und s die Seiten des Dreiecks bezeichnen soll. Wenn wir die Seiten des Rechtecks betrachten, so sehen wir erstens, daß die beiden kleineren Seiten jeweils genau die Hälfte der Dreieckseite ausmachen, also jeweils s/2, daher zusammen nur so groß sind wie eine Dreieckseite, die anderen beiden Seiten aber jeweils kleiner als die Dreieckseiten sind.

Das erkennt man wie folgt: Die Diagonale des Rechtecks ist so lang wie die Dreieckseite, die Rechteckseite aber beträgt, wenn man den Satz des Pythagoras auf das Dreieck BEC anwendet und s die Diagonale, d die Rechteckseite bezeichnen soll:

$$s^2 = (s/2)^2 + d^2, \text{ d.h.}$$
$$s^2 - s^2/4 = d^2, \text{ also}$$
$$3/4\ s^2 = d^2 \text{ oder}$$
$$(3/4)^{1/2}\ s = d$$

Wir erhalten als Summe der Seiten für das Rechteck, wobei U_4 hier den Umfang des Rechtecks bezeichnen soll:

$$U_4 = 2 \cdot 1/2\ s + 2 \cdot (3/4)^{1/2}\ s$$
$$= s + 3^{1/2}\ s$$

und wir erkennen, daß $s + 3^{1/2}\ s$ bestimmt kleiner ist als 3s, daß also der Umfang des Rechtecks kleiner ist als der des Dreiecks. Wenn wir jetzt also die Rechteckseiten so verlängern, daß der Umfang dem des Dreiecks gleich wird, dann bekommt es offensichtlich eine größere Fläche, nämlich die vorige und zusätzlich das schmale Stück ECGF.

Dies ist sehr einleuchtend, doch Bradwardine hat den Beweis nicht für alle Vielecke verallgemeinert und nur angedeutet, daß dies sehr leicht möglich sei. Wir müssen uns also noch ein paar weitere Gedanken zur Größe der Flächen machen, um vollends über den Prozeß, der uns letztendlich zu unserem isoperimetrischen Kreis führen soll, Klarheit zu erhalten. Dies wollen wir das nächste Mal untersuchen.

Leserbriefe

e-mail: redaktion@solidaritaet.com

Bismut nicht radioaktiv

Zu „Die politische Bedeutung der Kernenergie“ in Neue Solidarität *Nr.8/2001*

Ich möchte Ihnen zunächst zu diesem Artikel meinen Glückwunsch aussprechen, stellt er doch eine Menge an Zusammenhängen in erfrischender Deutlichkeit dar. Leider muß ich jedoch zu einigen der dargestellten sachlichen Inhalte meine Zustimmung energisch verweigern! Wer hat Ihnen erzählt, Bismut (und nicht Wismut, wie es früher mal in Deutschland — und nur hier — hieß) sei radioaktiv? In der Natur kommt Bismut in verschiedenen Erzen, vor allem als Wismutglanz, Wismutocker, Wismutblende (hier zeigt sich der deutsche Namensgeber ...), Bismutit und Lillianit vor. Es hat nur ein natürliches Isotop, Bi-209, das stabil ist, also nicht radioaktiv. Daneben sind eine Reihe von künstlichen (einige von diesen kommen gleichwohl in natürlichen Zerfallsreihen vor) Isotopen bekannt (Bi-199 bis Bi-215), die allesamt radioaktiv zerfallen, wobei Halbwertszeiten von 2,5 Minuten bis zu 3 Millionen Jahren ermittelt wurden. Gerade in einem Artikel mit der potentiellen Brisanz des vorliegenden sollten Sie es tunlichst vermeiden, sich inhaltliche Mängel, die schnell nicht als Fehlinformation, sondern als fachliche Inkompetenz gedeutet werden, nachweisen zu lassen.

Dr. Martin Brenda, Diplomchemiker, Münster

Sicherheiten abgeschaltet

Auf S. VI der Sonderausgabe der *Neuen Solidarität* vom Februar 2001 wird der Aufsatz von Dr. Böttiger und Gabriele Liebig zur BSE-Krise eingeleitet mit dem zu kurzen Hinweis: „BSE müsse für die Landwirtschaft werden, was 'Tschernobyl' für die Atomkraft gewesen sei, fordert Bärbel Höhn“. Das scheint mir ohne paralleles Lesen von Dr. Böttigers Aufsatz über die sachgemäßere Einstellung zur Atomenergie nicht deutlich genug. Die Tschernobyl-Krise wird in unserer Publizistik nicht deutlich abgehoben, auch unseren Grünen sind unsere sehr viel sichereren Atomenergieanlagen, selbst die von Harrisburg, offenbar unbekannt. In Tschernobyl wurden absichtlich vor dem Unfall alle Sicherheitsanlagen abgeschaltet, und selbst eine in Stendal aufgebaute, etwas sicherere sowjetische Kernenergieanlage wird heute abgebaut zu Tausenden Tonnen Schutt, ohne je gelaufen zu sein, weil sie westlichen Sicherheitsbestimmungen nicht entspricht.

Das können leider nicht alle Leser von jenem BSE-Aufsatz übersehen. — Es fehlte der Zusatz: „Was jene sowjetischen Behörden illegal an Sicherheitsvorkehrungenen in Tschernobyl abschalteten, haben unsere Behörden bei BSE gar nicht erst eingeschaltet.“

Prof. Dr. Dr. h.c. W. Luck, Marburg