Über die Leidenschaft der Erkenntnis und die Konstanten der Natur

Folge 5: Inkreise und Umkreise

In diesem Jahr wird der 600. Geburtstag des Renaissancekardinals und Begründers der modernen Naturwissenschaften Nikolaus von Kues (1401-64) gefeiert. Caroline Hartmann inspirierte dies zu einer neuen Geometrieserie. Darin geht es um die besondere Herangehensweise des Cusaners an die „Quadratur des Kreises“ bzw. die Berechnung der für alle Kreise konstanten Beziehung zwischen ihrem Umfang und Durchmesser.

Letztes Mal haben wir von Nikolaus Cusanus erfahren, daß wir durch die Untersuchung von isoperimetrischen Vielecken — also denjenigen, die alle den gleichen Umfang haben — irgendwann auch zum isoperimetrischen Kreis gelangen werden. Doch nicht einfach durch die Konstruktion weiterer Vielecke, sondern durch einen Prozeß, der dem *lebendigen Prozeß* des menschlichen Geistes ähnelt: nämlich durch beständiges Vergleichen der Inkreis- und Umkreisradien und der Idee, daß diese „Unterscheidungen“ sich im isoperimetrischen Kreis in eins auflösen müssen. Denn dort sind In- und Umkreis eins: der isoperimetrische Kreis selbst. In seiner Schrift *Über die Vermutungen* erklärt Nikolaus von Kues die für den einfachen Verstand so mühselige Suche nach dem „unendlichen“ Ort des Kreises als Paradoxon zwischen der Erkenntnis durch die Vernunft und die niemals genaue „Abbildung“ in der realen, sinnlichen Welt folgendermaßen:

„Jede der Einheiten ist in ihrem eigentlichen Sein nicht mitteilbar, nicht erklärbar, nicht erfaßbar. Jedes Seiende ist nur in seinem eigentlichen Sein ganz es selbst, in jedem anderen aber kann es sich nur uneigentlich repräsentieren. So ist der Kreis, als ein Gegenstand der Vernunft, in seinem eigentlichen Sein nur in der Vernunft selbst erfaßt. Betrachtet Ihr nämlich die Figur, von deren Mittelpunkt zum Umfang alle Geraden gleich lang sind, so faßt Ihr in dieser Figur durch die Vernunft den Kreis als Gegenstand der Vernunft. Aber außerhalb der Vernunft selbst ist er eine mit den Sinnen wahrnehmbare Figur, also in einem ihm uneigentlichen Sein und daher nicht sein Sein selbst... Die sichtbare Kreisfigur nimmt zwar, trotz ihres Andersseins, an der Einheit des rationalen Seins des Kreises teil; aber die Genauigkeit des Kreis-Seins wird ihr dabei nicht mitgeteilt. Die Vervielfältigung jener Einheit geht nicht ohne Anderssein ab. Keine sichtbare Kreisfigur genügt der Bestimmung genau gleicher Länge aller Radien; und keine dieser Figuren kann der anderen in allem gleich sein. Keine Kreisfigur, so genau sie auch erscheinen mag, gibt es, der gegenüber nicht eine noch genauere möglich wäre...“ („De coniecturis“, *Über die Vermutungen*)

Mit anderen Worten können wir also vernunftmäßig, und auch durchaus „genau“, den isoperimetrischen Kreis auffinden, doch außerhalb der Vernunft wird er nie mit absoluter Genauigkeit darstellbar sein. Das heißt, die Genauigkeit entspricht nur dem jeweiligen Grade der Vernunft, und so nähert man sich der Wahrheit „von der Vernunft her“ immer mehr an, erreicht aber immer nur eine neue, „genauere“ Genauigkeit.

Wir wollen uns jetzt noch einmal auf die Betrachtung der In- und Umkreise unserer Vielecke besinnen. Bei zu langem Nachdenken über das Unendliche können die Gedanken nämlich auf einmal so in Verwirrung geraten, daß man meint, man wüßte nicht mehr, wieviel 2 mal 2 ist. Wie wir letztes Mal schon gesehen haben, ermittelt man die Fläche der Vielecke, indem man die jeweils n kleinen Dreiecksflächen addiert, aus denen die Vielecke zusammengesetzt sind, wobei n die Anzahl der Seiten des Vielecks anzeigt (siehe Abbildung 1).

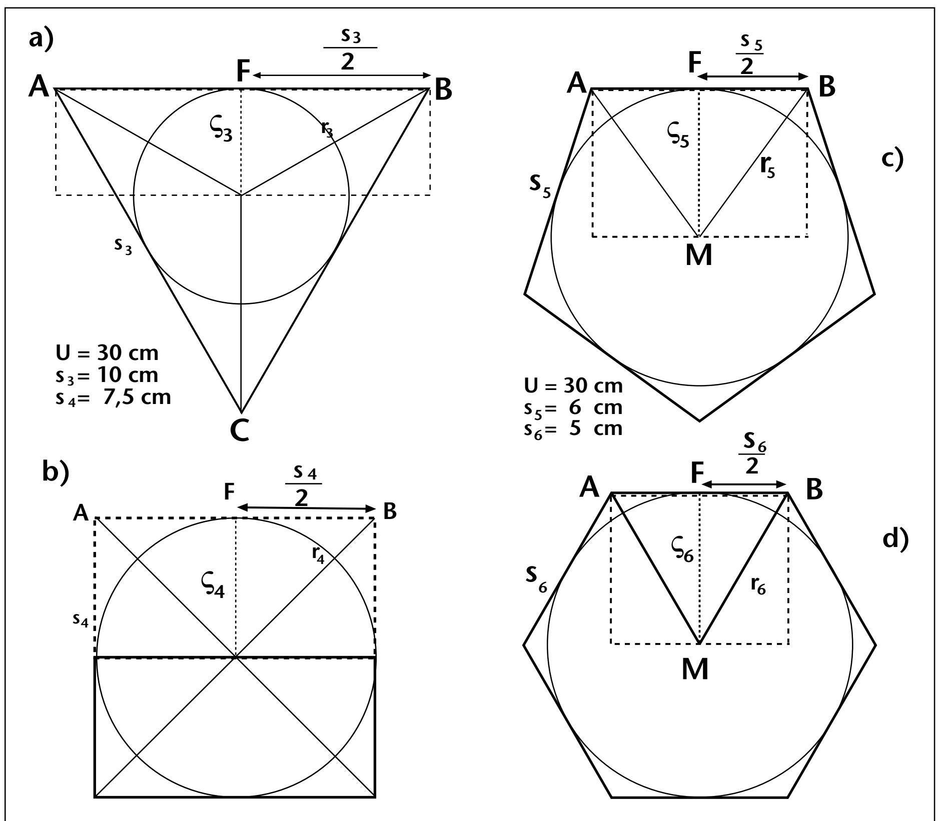

Abbildung 1a-d: ***Mit steigender Seitenanzahl werden die Vieleckseiten immer kürzer, die Inkreisradien dagegen immer größer. Und wie verhalten sich die Umkreisradien?***

Übrigens: Wer Schwierigkeiten hat, den algebraischen Herleitungen zu folgen, kann sich getrost nur an den Zeichnungen orientieren. Nikolaus´ Ideen werden auch dadurch verständlich.

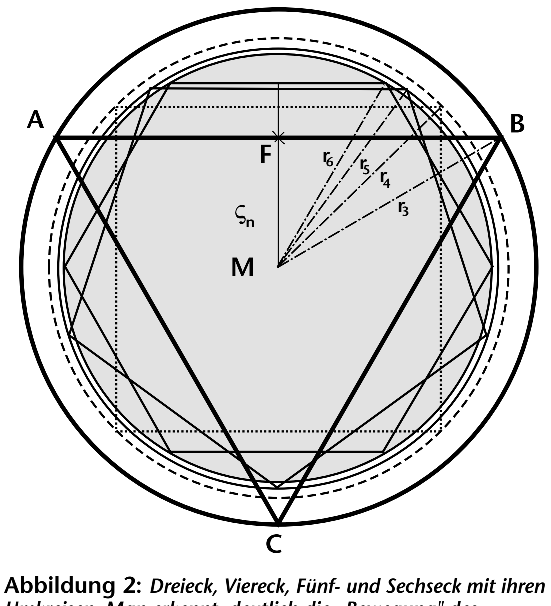

Abbildung 2: ***Dreieck, Viereck, Fünf- und Sechseck mit ihren Umkreisen. Man erkennt deutlich die „Bewegung“ des Umkreisradius in Richtung des Punktes F.***

Nikolaus von Kues behauptet, daß die Fläche der Vielecke mit steigender Eckenzahl immer größer wird. Und das sehen wir auch leicht ein, denn U ist ja immer derselbe Umfang, und der Inkreisradius ς_n wird — wenn Sie sich die verschiedenen Vielecke noch einmal genau betrachten — immer ein klein wenig größer. Die Seitenlängen s_n sowie die Umkreisradien r_n werden dagegen aber immer kleiner!

Um dies alles besser zu verstehen, wollen wir uns das Verhältnis der Inkreis- und Umkreisradien unserer Vielecke genauer betrachten.

Zuerst zum Dreieck: Wir betrachten das rechtwinklige Dreieck FBM mit den beiden Katheten ς_3 und $s_3/2$ sowie der Hypothenuse r_3, wobei s_3 die Dreieckseite und r_3 der Umkreisradius des Dreiecks ist. Wenn wir den Satz des Pythagoras anwenden, erhalten wir in diesem Fall folgende Beziehung zwischen dem Inkreisradius ς_3 sowie dem Umkreisradius r_3 und der Seite s_3 des Dreiecks:

$\varsigma_3^2 = (s_3/2)^2 + r_3^2$

Genauso ist es beim Viereck, Fünfeck usw., wenn man jeweils die entsprechenden Dreiecke betrachtet. Wenn wir uns dabei noch in Erinnerung rufen, daß die Vieleckseiten nichts anderes sind als immer der gleiche Umfang, unterteilt in n Teile (n = 3, 4, 5 usw., also die Anzahl der Seiten), so erkennen wir eine recht interessante Beziehung zwischen Inkreis- und Umkreisradius: Der Umkreisradius r_n wird nämlich immer kleiner, bleibt allerdings dabei immer größer als der Inkreisradius ς_n. Dieser wird dagegen immer größer, wie Sie ja schon in Abbildung 1 gesehen haben, doch bleibt er immer kleiner als der Umkreisradius. Daraus ergibt sich die Vermutung, daß der Inkreisradius sich mit steigender Seitenzahl dem Umkreisradius annähert; und genau dann, wenn n *unendlich* groß wird (bzw. wenn das isoperimetrische Vieleck unendlich viele Seiten hat) — ja, was passiert dann wohl?

Und noch etwas anderes können wir feststellen, was höchst bemerkenswert ist. Am besten fertigen Sie sich dazu wieder eine Zeichnung der verschiedenen Vielecke an. Sie können wieder die gleichen Werte für den Umfang und die Seiten wie letztes Mal benutzen. Dann ist für U = 30 cm die Dreieckseite 10 cm, die Viereckseite 7,5 cm, die Fünfeckseite 6 cm und die Sechseckseite 5 cm lang. Diesmal müssen Sie aber alle Vielecke „ineinander“ zeichnen, und zwar alle um den gleichen Mittelpunkt M. Wenn Sie das geschafft haben, kennen Sie auch alle Radien und können nun die jeweiligen In- und Umkreise einzeichnen (siehe Abbildung 2).

Hier bemerken wir eine faszinierende „Bewegung“ der Umkreisradien r_3, r_4, r_5 in Richtung einer Stelle zwischen der Seitenmitte F und dem Eckpunkt B des Dreiecks. Es wäre zu mühselig, diesen Punkt, auf den sich die Umkreisradien zubewegen, rechnerisch zu ermitteln, denn wir müßten unendlich viele Vielecke mit ihren Inund Umkreisen zeichnen und berechnen — nur um schließlich festzustellen, daß man ihn immer *noch genauer* bestimmen könnte.

Dies wäre auch ein sehr formaler und wenig einsichtiger Weg zum isoperimetrischen Kreis, denn der Verstand sagt uns nur vage, dort müsse „irgendwo“ die Stelle liegen, wo der Radius des isoperimetrischen Kreises die Dreieckseite zwischen F und B schneidet. Unsere Erkenntniskraft kann diesen Ort aber auf ganz andere Weise ermitteln. Nikolaus beschreibt dies so:

„Es muß also zwischen diesen zwei Punkten — dem Endpunkt und dem Mittelpunkt der Seite (er meint die Punkte B und F, an denen Inkreis- und Umkreisradius auf die Dreiecksseite treffen, C.H.) — ein Punkt liegen, so daß, wenn die Verbindungslinie zwischen diesem Punkt und dem Mittelpunkt des Umkreises in einem bestimmten Verhältnis verlängert wird... daß dann die verlängerte Strecke gleich dem Halbmesser (Radius) des isoperimetrischen Kreises ist. Daran kann kein Zweifel bestehen. Es trifft sich aber, daß dieser Punkt in allen Vielecken von den beiden anderen Punkten, nämlich vom Endpunkt und vom Mittelpunkt der Seite, verschiedenen Abstand hat. Er nähert sich der Seitenmitte und rückt vom Endpunkt ab, je größer die Vieleckfläche wird. Wie sich also dieser Punkt in Vielecken mit wachsender Fläche der Seitenmitte ständig nähert bis zum Zusammenfallen dieser drei Punkte im größten Vieleck, so rückt er notwendig in Vielecken mit geringerer Fläche von der Seitenmitte ab, bis er im kleinsten Vieleck von beiden Punkten den größten Abstand hat.“ („De circuli Quadratura“, *Von der Quadratur des Kreises*)

Nächstes Mal wollen wir sehen, ob wir diesen Punkt tatsächlich finden und dann vielleicht auch den Radius des isoperimetrischen Kreises bestimmen können.

BüSo. *Elke Gregory, die BüSo-Landesvorsitzende von Baden-Württemberg, gibt folgende Stellungnahme ab:*

BüSo verurteilt die Abschaffung der Carl-Zeiss-Stiftung

Roland Voigt, Finanzchef der Carl-Zeiss-Stiftung, hat auf einer Bilanzpressekonferenz am 1. März in Frankfurt am Main angekündigt, daß ein neues Statut für die Stiftung mit ihren Unternehmungen Schott Glas (Mainz) und Carl Zeiss (Unterkochen) erstellt werden soll, um „die Unternehmensstrukturen zeitgemäß weiterzuentwickeln“. Die Stiftung selbst werde zu einer Holding umgebaut. Die soziale Absicherung der ehemaligen Beschäftigten und das Pensionsstatut fallen dann weg, und somit tauchen auch die 1,5 Mrd. DM, die die gut 6000 Pensionäre aus der Alterskasse beziehen, zukünftig in der Bilanz nicht mehr auf. Auch ein Börsengang wird nicht ausgeschlossen.

Die sozialen Ideen des Mitinhabers der Jenaer Zeiss-Werke Ernst Abbe, die in der Stiftung nach seinen Vorstellungen „für die Ewigkeit“ festgeschrieben sein sollten, werden damit dem Tanz um das goldene Kalb, d.h. dem Shareholder Value, geopfert. Nachdem bereits unter dem Sanierer und Vorstandschef Lothar Späth der Konzern in Thüringen völlig in Einzelteile zerschlagen worden ist, bedeutet jetzt die Auflösung der Stiftung den letzten Sargnagel für einen ehemaligen marktbeherrschenden Vorzeigebetrieb, der in Ost und West gleich großes Ansehen hatte. Die Globalisierung kennt offenbar keine Grenzen. Als Carl Zeiss, der Begründer der Jenaer Zeiss-Werke, 1889 verstarb, begann sich sein Nachfolger Ernst Abbe mit der Zukunftsperspektive seiner Zeissianer zu beschäftigen. Als Arbeitersohn war ihm mehr als bewußt, daß die Arbeitskraft des Menschen der größte Schatz der Nation ist. Heute ist die Aktie der größte Schatz der Nation – zumindest solange sie steigt. Abbes Sorge damals wie heute scheint mir mehr als berechtigt und höchst aktuell, gerade angesichts der laufenden Bestrebungen, die von ihm ins Leben gerufene Carl-Zeiss-Stiftung abzuschaffen. Abbe hatte 1889 in weiser Voraussicht folgendermaßen argumentiert: „Eines Tages werden die Erben zu faul und zu bequem; dann ziehen sie sich zurück, eine Aktiengesellschaft entsteht. Ihre Papiere werden an der Börse gehandelt, und so weiter und so fort. Was andere tun, kann ich nicht ändern, aber das Zeiss-Werk soll nicht auf solche Abwege geraten... Es gibt Notwendigkeiten, in denen das Recht des Einzelnen vor dem Rechte der Gesamtheit zu schweigen hat“.

In nur einem Punkte irrte er. Heute sollen nicht nur eine, sondern gleich *zwei* Aktiengesellschaften entstehen, eine für Zeiss und eine für Schott. Und weiter: „Die wirtschaftliche Freiheit der alten Nationalökonomie [damals meinte er den Freihandel, heute würde er Globalisierung sagen, E.G.] ist weiter nichts als wirtschaftliches Faustrecht.“ Abbe wollte Sicherungen zu schaffen, die wissenschaftlich, technisch und sozial über seinen Tod hinaus das Werk schützten, so daß seine Tradition unter keinen Umständen aufgegeben werden könnte. „Das Werk darf für niemanden eine Quelle zu persönlichem Gewinn werden“, verfügte er.

Im Mai 1889 wurde die Stiftungsurkunde unterschrieben. Zweck der Stiftung war: „Die Schaffung von gemeinnützigen Einrichtungen und Maßnahmen zugunsten der arbeitenden Bevölkerung Jenas und seiner nächsten Umgebung; dazu kommt noch die im einzelnen festzulegende Unterstützung der Universität. Der Name sollte für alle Zeit festgelegt bleiben, zu Ehren des Mannes, der zu oben genannten Unternehmungen den ersten Grund gelegt hat, und zur dauernden Erinnerung an sein einzigartiges Verdienst: ein geordnetes Zusammenwirken von Wissenschaft und technischer Kunst auf seinem besonderen Arbeitsgebiet zielbewußt angebahnt zu haben.“ *Elke Gregory*