Neue Solidarität — Nr. 15 · 11.4.2001

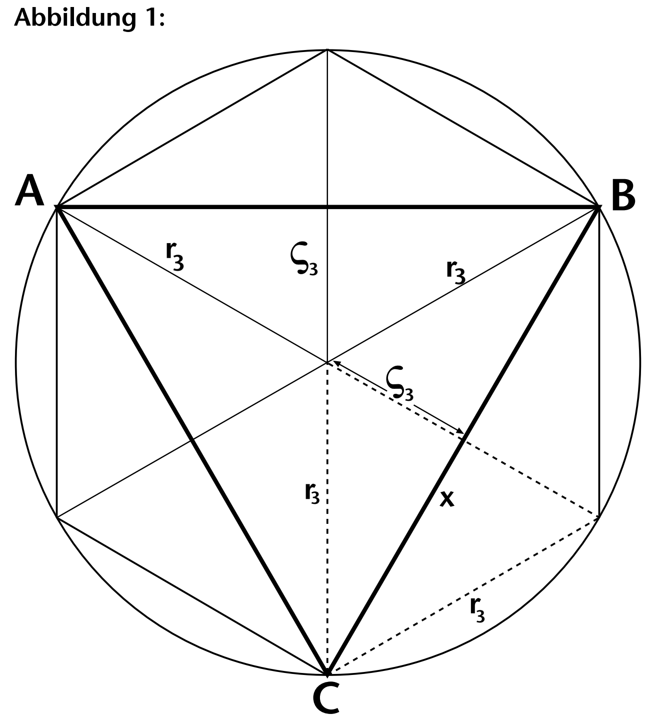
Über die Leidenschaft der Erkenntnis und die Konstanten der Natur

Folge 8: Die Musik – eine andere Art, Geometrie zu treiben

In diesem Jahr wird der 600. Geburtstag des Renaissancekardinals und Begründers der modernen Naturwissenschaften Nikolaus von Kues (1401-64) gefeiert. Caroline Hartmann inspirierte dies zu dieser Geometrieserie. Darin geht es um die besondere Herangehensweise des Cusaners an die „Quadratur des Kreises“ als Beispiel für die Art und Weise, wie der menschliche Geist überhaupt zu neuen Erkenntnissen gelangt.

Bei unserer Untersuchung der proportionalen Beziehung zwischen Umfang und Kreisdurchmesser haben wir jetzt so manche Geheimnisse kennengelernt. Die Untersuchung dieser „Naturkonstanten“ hat uns darauf gebracht, daß es nicht unbedingt der Gipfel der Erkenntnis ist, einen möglichst genauen Wert für π zu ermitteln — denn dann hätten wir einfach auf unseren Taschenrechner drücken können —, sondern daß der menschliche Geist das hinter der Frage verborgene „Paradoxon“, nämlich den Widerspruch zwischen den Extremen des „krummen“ Kreisumfangs auf der einen und des „geraden“ Durchmessers auf der anderen Seite irgendwie miteinander zu vergleichen, lösen will. Dies schaffen wir nicht mit dem „linearen“ Verstand, doch Nikolaus von Kues hat uns den „lebendigen“ Prozeß unseres Geistes, beständig Vergleiche anzustellen, gezeigt.

Abbildung 1:



In einem gleichseitigen Dreieck ABC ist der Umkreisradius r_3 doppelt so lang wie der Inkreisradius V_3. Dies erkennen Sie leicht, wenn Sie aus den Umkreisradien des Dreiecks ein gleichseitiges Sechseck konstruieren: $r_3 : V_3 = 2 : 1$, in der Musik entspricht dieses Verhältnis zweier Saiten der Oktave.

Der Cusaner hat auch erkannt, daß dieser lebendige Prozeß nicht nur in der Geometrie, sondern auch in der Astronomie und in der Musik angewendet wird. Denn in all diesen Bereichen kommt es darauf an, „krumme“ Dinge durch gerade Verhältnisse zu erklären. In der Astronomie hat Carl Friedrich Gauß z.B. die unbekannte Bahn des Asteroiden Ceres durch die Anwendung der sphärischen Geometrie entdeckt (siehe die Geometrieserie „Wie Gauß die Bahn des Ceres berechnete, *Neue Solidarität* Nr. 1-21, 1998), in der Musik sind es die Übergänge „zwischen“ den Noten bzw. die Intervalle und vor allem auch der Bau von Musikinstrumenten, die einen Vergleich zwischen „Krummem“ und „Geradem“ nötig machen.

Stellen Sie sich vor, jemand besucht — sagen wir im Jahre 2753 — ein klassisches Konzert. Auf dem Programm stehen Werke von Mozart, eine Sinfonie von Beethoven und sogar ein Klavierkonzert von Brahms — wunderbar! Doch statt des Flügels und der Stühle und Notenständer für das Orchester steht vorne auf der Bühne nur ein glänzender Apparat. Und als die Musik beginnt, wird sie nicht von Menschen gespielt, sondern eben von diesem Apparat, einem sogenannten Synthesizer, mit dem man die Noten und alle dynamischen Zeichen wie *crescendo, diminuendo, sforzato, pianissimo* usw., die der Komponist in der Partitur vorgegeben hat, mit hoher Genauigkeit wiedergeben kann. Alle Instrumente sind verblüffend gut wiedergegeben: Geigen, Celli, Posaunen, Flöten und Pauken. Ihr Klang erinnert sogar an den der jeweils besten ältesten „realen“ Instrumente aus der großen Zeit des kunstvollen Instrumentenbaus im 18. Jahrhundert. Und sogar ein *rubato* — die Möglichkeit, zur Verstärkung des Ausdrucks an bestimmten Stellen einzelne Noten länger oder eine ganze Passage langsamer zu spielen als die anderen, aber dabei trotzdem insgesamt im Tempo zu bleiben — leistet die Maschine ganz problemlos.

Einige ältere Leute aber, die sich noch an Erzählungen ihrer Vorfahren über Konzertaufführungen menschlicher Musiker und an das eigene Singen und Musizieren erinnerten, finden, daß diese Musik irgendwie anders war — nicht so „exakt schön“, aber irgendwie anders.

Unsere „Vorschau“ in die Zukunft mag manchem übertrieben vorkommen, doch wenn man heute eine brandneue „exakt schöne“ Hifi-Aufnahme anhört und sie mit Darbietungen eines Joseph Joachim, Pablo Casals, Fritz Wunderlich oder einer Erna Berger vergleicht, vermißt man da nicht etwas? Aber was? Was bedeutet — nachdem wir uns einige Zeit mit der Frage der *Genauigkeit* beim Vergleich zwischen dem „krummen“ Kreis und den „geraden“ Vielecken beschäftigt haben — „exakt schön“?

In der Musik haben wir es nicht nur mit irgendwelchen exakt erzeugbaren Schallwellen zu tun, vielmehr gründet sich ein großes Werk zuallererst auf eine Idee, die mittels der verschiedensten Intervalle, deren Umkehrungen etc. ausgedrückt und vielleicht besser als „Spiel“ mit dem „Vergleichen zwischen Tönen“, den „Übergängen zwischen Tönen“ und deren Variationen bezeichnet werden könnte. Das Problem ist aber auch hier, daß die höchste Idee des Komponisten zwar in den Noten ausgedrückt ist und durch immer besseres Studieren und Proben darstellbar wird, aber niemals „endgültig genau“; denn wie auch in der Geometrie ist die Erkenntnis durch das rein verstandesmäßige Annähern nicht erreichbar. Aber die Erkenntniskraft des Menschen kann die Idee hinter den Noten „erahnen“, wenn er nach Wahrheit strebt.

Ein Musikstück ist deshalb in jedem noch so kleinen Bereich „krumm“, oder anders gesagt: Der Übergang von einem Ton zum nächsten kann nicht nur auf so viele Weisen, wie es Menschen gibt, ausgedrückt werden, sondern im Prinzip auf „unendlich“ viele verschiedene Weisen.

Bei der Erarbeitung eines Stückes geht es nun darum, aus diesen Möglichkeiten die „wahrste“ herauszuarbeiten, die der Idee des Komponisten am nächsten kommt. Vielleicht ist es in der Musik sogar diese „Wahrhaftigkeit“, die letztendlich für den Ausdruck und die hörenden Menschen entscheidend ist und deshalb vor der Exaktheit oder Genauigkeit an erster Stelle stehen muß.

Wir wollen jetzt einmal Nikolaus' Gedanken zur Musik betrachten und uns diese nachher an geometrischen Beispielen verdeutlichen:

„Auch in der Musik gibt es nach jener Regel keine Genauigkeit. Kein Ding kommt nämlich mit einem anderen in Gewicht, Länge und Dichte überein; ebensowenig ist es möglich, im genauen Sinne harmonische Verhältnisse zwischen den Tönen von Flöten, Glocken und anderen Instrumenten sowie menschlichen Stimmen zu finden; die Harmonie könnte immer noch genauer bestimmt werden. Auch ist der Grad der wahren Entsprechung bei verschiedenen Instrumenten nicht derselbe, ebensowenig wie bei verschiedenen Menschen; sondern in allem herrscht eine notwendige Verschiedenheit nach Ort, Zeit, Verknüpfung und dergleichen.“ („De docta ignorantia“, *Die belehrte Unwissenheit*)

Betrachten wir noch einmal unser geometrisches Beispiel: Wir waren vom Dreieck, dem kleinstmöglichen Vieleck, ausgegangen, hatten den In- und Umkreis untersucht und durch Betrachtung einiger umfangsgleicher (d.h. isoperimetrischer) weiterer Vielecke und ihrer In- und Umkreise erkannt, daß der menschliche Geist nur auf dem Wege des beständigen „Vergleichens“ dieser unterschiedlichen Verhältnisse letztendlich zum isoperimetrischen Kreis gelangen kann. Dabei mußten wir feststellen, daß wir diesen Kreis zwar geometrisch genau bestimmen können, der Grad dieser Genauigkeit (z.B. in Stellen nach dem Komma für π) immer noch gesteigert werden kann.

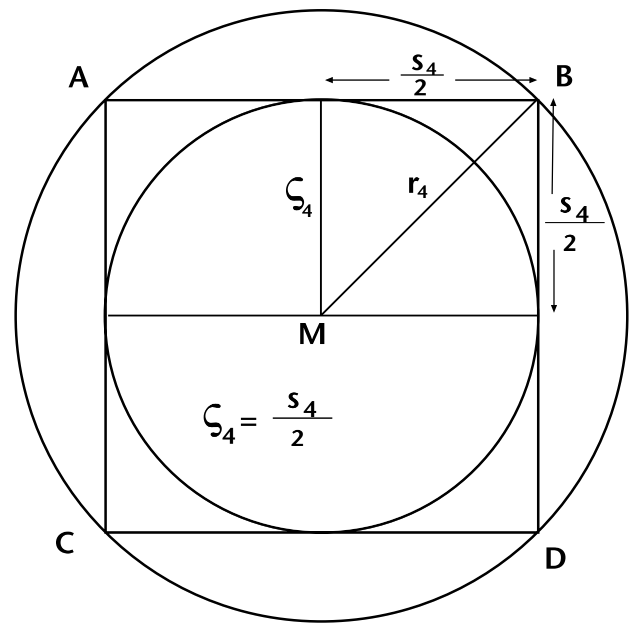
Die Verhältnisse zwischen In- und Umkreisen der Vielecke kann man auch mit den musikalischen Intervallen vergleichen. Wir wollen uns einige dieser „Intervalle“ betrachten und gehen dabei wiederum vom Dreieck aus: Das Dreieck hatte von allen Vielecken den kleinsten Inkreis und den größten Umkreis. Der Unterschied zwischen Umkreisradius r_3 und Inkreisradius $ς_3$ ist daher beim Dreieck am größten.

Wie Sie sich erinnern werden, konnten wir noch eine andere interessante Beziehung zwischen Inkreis- und Umkreisradius feststellen, nämlich daß hier $ς_3$ genau die Hälfte von r_3 beträgt.

Dies können Sie erkennen, wenn Sie wie in *Abbildung 1* aus dem Umkreisradius des Dreiecks im selben Umkreis ein gleichseitiges Sechseck konstruieren und nun eines der sechs kleinen Dreiecke im Sechseck betrachten. Die Mittelsenkrechte dieses Dreiecks teilt nämlich unseren Radius r_3 in zwei Hälften der Länge $ς_3$ unseres Ausgangsdreiecks. Das Verhältnis $ς_3 : r_3$ ist 1 : 2, was in der Musik einer Oktave entspricht.

Betrachten wir jetzt ein weiteres Vieleck, das Viereck oder Quadrat (siehe *Abbildung 2*):

Abbildung 2:



Beim Viereck ist das Verhältnis zwischen Inkreis- und Umkreisradius ungefähr 2 : 3, welches in der Musik die Quinte darstellt.

Hier können wir sofort eine sehr einfache Beziehung zwischen Inkreis- und Umkreisradius erkennen. Der Inkreisradius $ς_4$ ist offensichtlich halb so lang wie die Viereckseite s_4, und mit dem Satz des Pythagoras erhalten wir

$$r_4^2 = ς_4^2 + (s_4/2)^2$$
$$= 2 \cdot ς_4^2$$
$$\text{Das heißt: } ς_4^2 = r_4^2/2$$

und wir erhalten eine Beziehung von $ς_4$ zum Umkreisradius r_4 von $1/\sqrt{2}$, was angenähert einem Verhältnis von 2 : 3 entspricht. Dies ist in der Musik das Intervall der Quinte.

Der geistige Prozeß des ständigen Vergleichens findet also nicht nur in der Geometrie, sondern bei der Benutzung von Intervallen und ihren Umkehrungen auch in der „musikalischen“ Geometrie statt. Die „höchste Idee“ der Komposition — die bei unserer Suche nach π dem isoperimetrischen Kreis entspricht — wird von der durch den Künstler auf unendlich verschiedene Weise gestaltbaren „Bewegung“ zwischen den Noten immer besser und „wahrhafter“ ausgedrückt als von einem noch so ausgeklügelten Apparat.

Es ist ganz offensichtlich, daß unser Synthesizer bzw. Computer diese höchste Idee niemals in der gleichen Weise wie ein Mensch darstellen kann, denn ein Computer ist eine Maschine, die auf die eindeutig festgelegte Gestaltungsmöglichkeit ihres Programms eingeschränkt ist. Der Mensch aber vermag diese höchste Idee der Komposition kraft seines Geistes nicht nur auszudrücken, er vermag sie auch zu *vermitteln*. Die Musik und auch die Geometrie sind nämlich „Möglichkeiten“, Ideen zwischen den Menschen von einem Geist zum anderen zu kommunizieren. Der Politiker und Philosoph Lyndon LaRouche schrieb in seiner Schrift *Politik als Kunst*, wenn es den ausführenden Musikern gelingt, in einem Musikstück das auszudrücken, was „zwischen den Noten“ steht, und diese Idee des Komponisten und der Musiker „Seele und Geist des Publikums erreicht, dann ist dies nur deshalb möglich, weil zwischen den entsprechenden Aspekten der schöpferischen Erkenntnisprozesse der Beteiligten eine Resonanz besteht.“

Die „exakte Schönheit“ der Töne einer Maschine dagegen ist eine äußerst statische Angelegenheit. Nikolaus von Kues schrieb über die außerordentliche Fähigkeit des menschlichen Geistes, die Krümmung bis in den kleinsten Bereich erfassen, ausdrücken und dadurch vermitteln zu können:

„...denn die Menschlichkeit (das Menschsein) ist eine Einheit, was bedeutet, daß sie eine Unendlichkeit im Menschen ist. Nun ist es aber das Wesen einer solchen Einheit, Seiendes aus sich zu entfalten, denn sie umschließt in ihrer Einfachheit eine Vielfalt des Seienden... Die Einheit des Menschlichen, verwirklicht im konkreten menschlichen Dasein, scheint das All in der ihr gemäßen Weise einzuschließen. Die Kraft dieser Einheit nimmt es mit dem All auf und zwingt es in die Gewalt des Menschen, so daß nichts seiner Herrschaft entgeht. Denn alles traut er sich, mit den Sinnen oder der Vernunft oder Einsicht zu erfassen. Diese in ihm liegenden Fähigkeiten führen zu einer Selbsteinschätzung, die an alles nach dem Maßstab des Menschlichen herangehen zu können glaubt. Der Mensch ist ein Gott, wenn auch nicht im absoluten Sinne, weil er eben nur Mensch ist; also: ein menschlicher Gott. Der Mensch ist aber auch die Welt, wenn er auch nicht alles konkret sein kann, eben weil er Mensch ist; also ist er ein Mikrokosmos oder eine menschliche Welt...“ (*Über die Vermutungen*)

Bemerkenswert ist, daß Nikolaus das, was wir heute an Klang- und Ausdrucksmöglichkeiten der Instrumente, an glänzender Virtuosität der Künstler erleben, nicht nur als erster als „Potential“ erkannte, sondern sogar die Grundlagen dazu schuf. Das betrifft vor allem den Instrumentenbau, aber auch die Frage der „Stimmung“.

Zu Nikolaus' Zeit waren weder die Kreisfunktionen, die sogenannten trigonometrischen Funktionen wie Sinus und Cosinus entwickelt — erste genaue Sinustabellen wurden erst von Regiomontan angelegt, der auch den Cosinus „erfand“ —, noch hatte man genaue Vorstellungen von der „Wohltemperierung“, welche erst Variationen und Modulationen durch alle Tonarten erlaubt.

Nächstes Mal werden wir zum Abschluß unserer Serie noch die bildliche Konstruktion eines isoperimetrischen Kreises kennenlernen.