Über die Leidenschaft der Erkenntnis und die Konstanten der Natur

Folge 1: Plancks Wirkungsquantum und die Fruchtspeicher der Ägypter

In diesem Jahr wird der 600. Geburtstag des Renaissancekardinals und Begründers der modernen Naturwissenschaften Nikolaus von Kues (1401-64) gefeiert. Caroline Hartmann inspirierte dies zu einer neuen Geometrieserie für *Neue Solidarität*.

Konstanten sind das, was Gottfried Wilhelm Leibniz einmal als „Charakteristika universalis“ bezeichnet hat — universell gültige, proportionale Beziehungen zwischen verschiedenen Naturvorgängen. Was soll man sich darunter vorstellen? Es wäre hier die Gravitation zu nennen, die Elementarladung oder auch das immer gleiche Verhältnis zwischen dem Kreisumfang und seinem Durchmesser.

Vor gut hundert Jahren, am 14. Dezember 1900, stellte Max Planck der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft in Berlin eine ganz neue, von ihm entdeckte universelle Konstante vor: der in seiner Strahlungsformel wichtige Proportionalitätsfaktor h, genannt das „Plancksche Wirkungsquantum. Damit hatte es folgende Bewandtnis: Im Jahre 1859 hatten die Physiker Gustav Kirchhoff und Robert Bunsen bei Experimenten mit Farbenspektren verschiedener Körper ein verblüffendes Phänomen festgestellt. Es ergab sich bei allen Körpern, unabhängig von ihrer Größe oder Beschaffenheit, ein immer gleiches proportionales Verhältnis zwischen der Temperatur des strahlenden Körpers und der Wellenlänge seiner ausgesandten Strahlen. Wenn man z.B. einen Kupferdraht oder einen Platindraht erhitzt, dann werden beide Drähte Strahlen mit der gleichen Wellenlänge aussenden, obwohl sie aus völlig verschiedenem Material bestehen.

Es galt nun, diese Proportionalität als physikalisches Gesetz zu erklären. Planck fand das allgemeingültige Gesetz, doch hatte es eine Bedingung: Die Energieübertragung bzw. Absorption und Emission von Strahlung mußte in kleinen Portionen bzw. „gequantelt“ vor sich gehen.

Diese Erklärung hat den Wissenschaftlern bis auf den heutigen Tag einiges Kopfzerbrechen bereitet. Und anstatt vor allem in die Experimente und direkte Untersuchung der Natur zu investieren, verbringt man seitdem die meiste Zeit mit Versuchen der „Deutung“ theoretischer „Modelle“ der Natur, ja man geht sogar soweit — wie zum Beispiel beim Urknallmythos oder der verrückten Klimahysterie — Ergebnisse aus echten praktischen Experimenten unter den Teppich zu kehren, um nur nicht diese Denkmodelle aufgeben zu müssen.

Max Planck dagegen gehörte zu den Weisen in der Wissenschaft, welche die Wahrheit unter einem Haufen von „Scheinproblemen“ herausfinden. Er war sich klar, daß es bei Vorgängen in der Natur, bei denen irgendwelche Konstanten auftreten, um die entscheidenden und immer gleich bleibenden „Charakteristika“ des Universums handeln muß, „welche unabhängig von speziellen Körpern oder Substanzen, ihre Bedeutung für alle Zeiten und alle, auch außerirdische und außermenschliche Kulturen notwendig behalten.“ (M. Planck, *Ein Leben für die Wissenschaft*)

Hinsichtlich der großen Paradoxa, vor denen die Physik seit Plancks Entdeckung steht, hat er immer wieder betont, daß stets nach einer wahrhaftigen Lösung zu forschen sei. Noch in einem seiner letzten Vorträge am 17. Juni 1946 in Göttingen über die „Scheinprobleme der Wissenschaft“ bemerkte er:

„Bei dieser Sachlage drängt sich aber eine grundsätzliche und folgenschwere Frage auf. Wenn wir in so zahlreichen Fällen die Wahrnehmung machen, daß große und wichtige Probleme bei der Nachprüfung sich als Scheinproblem entpuppen, ja daß das Wort ‚Wirklichkeit’ manchmal einen ganz verschiedenen Sinn hat, je nachdem der Standpunkt der Betrachtung gewählt wird, kommt dann nicht unsere ganze wissenschaftliche Erkenntnis auf einen flachen Relativismus hinaus? Gibt es denn überhaupt kein absolut gültiges Urteil, keine absolute Wirklichkeit, unabhängig von irgendeinem Standpunkt? Es wäre schlimm, wenn dem so wäre. Nein, wohl gibt es in der Wissenschaft auch absolut richtige und endgültige Sätze, ebenso wie es in der Ethik absolute Werte gibt, und, was die Hauptsache ist, gerade diese Sätze und Worte sind die wichtigsten und erstrebenswertesten von allen. In der exakten Wissenschaft sind hier zu nennen die Größen der sogenannten absoluten Konstanten, wie das Elementarquantum der Elektrizität oder das elementare Wirkungsquantum und manche andere. Diese Konstanten ergeben sich immer als die nämlichen, nach welcher Methode man sie auch messen mag. Sie aufzufinden und alle physikalischen und chemischen Vorgänge auf sie zurückzuführen, kann man geradezu als das Endziel der wissenschaftlichen Forschung bezeichnen ...“

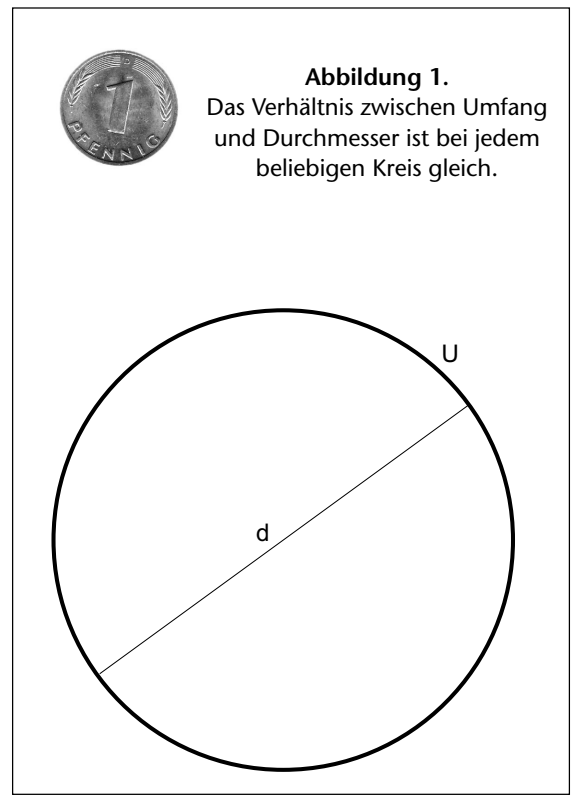

Abbildung 1.
Das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser ist bei jedem beliebigen Kreis gleich.

Die Naturkonstanten sind nämlich nicht einfach Zahlen, die ein „glattes“ Verhältnis zwischen zwei Größen darstellen, und auch nicht statistisch ermittelbar. Wenn man beginnt, die mit ihnen verbundenen Phänomene zu untersuchen, gerät man auf eine Entdeckungsreise in die Welt der Geheimnisse unseres Universums.

Wir wollen uns in dieser Geometrieserie ein wenig mit der Natur dieser Konstanten beschäftigen und als Beispiel diejenige Konstante betrachten, welche die proportionale Beziehung zwischen Umfang und Durchmesser jedes beliebigen Kreises darstellt — das sogenannte pi.

Heute drückt man beim Taschenrechner einfach auf das Zeichen π und ein exakter Wert erscheint — wie man meint. Wir benutzen den Wert in unserer Rechnung und denken nicht im Enferntesten darüber nach. Doch dabei verpassen wir die spannendsten Geschichten und faszinierendsten Geheimnisse der Menschheit. Denn die Konstanten sagen natürlich nicht nur etwas über die Geometrie des Universums, sondern auch über unseren eigenen Geist und seinen unerschöpflichen Forscherdrang aus.

Nehmen Sie einen Pfennig und zeichnen Sie seinen Kreis auf ein Blatt Papier. Die Beziehung zwischen diesem Umfang und dem kleinen Pfennigdurchmesser ist genau die gleiche wie bei dem Kreis, dessen Durchmesser so groß ist wie die Entfernung zwischen der Erde und der Sonne. Können Sie sich vorstellen, warum das so ist?

Wir wollen uns im folgenden verschiedene Untersuchungen dieses Phänomens anschauen, zuerst der alten Ägypter vor ungefähr 6000 Jahren, dann des Archimedes (285-212 v.Chr.) und vor allem die von Nikolaus Cusanus (1401-1464). Sie werden einen „lebendigen“ Prozeß wunderbarer geometrischer Phänomene entdecken, die alle in diesem — oberflächlich gesehen vielleicht etwas „formal“ wirkenden — mathematischen Verhältnis zwischen Umfang U und Durchmesser d stecken. Und vor allem werden Sie feststellen, daß es bei den Konstanten oder universellen „Charakteristika“ gar nicht darauf ankommt, einen immer exakteren Zahlenwert zu ermitteln, sondern, eher andersherum, daß der „Zahlenwert“ eigentlich nur ein Nebeneffekt auf dem Weg zur Ergründung der Geometrie unseres Universums ist.

Das „Rechenbuch des Ahmes“

Das ägyptische Reich wurde von 30 aufeinanderfolgenden Dynastien beherrscht. Die erste, begründet durch Mena, datiert zurück etwa ins Jahr 4455 v.Chr.. Menas Sohn Teta wird in verschiedenen Schriften schon als Gelehrter und als Kundiger der Arzneikunst genannt. Auch finden wir schon früh großartige Beispiele der Baukunst.

Es existiert auch ein „Rechenbuch“ des Ahmes, das einzige der vollständigen alten Schriften, die bisher der Öffentlichkeit übergeben wurden — viele unveröffentlichte Schriften befinden sich übrigens im Besitz des Britischen Museums in London — und dort lauten die Anfangsworte:

„Vorschrift zu erlangen zur Kenntnis aller dunklen Dinge ... aller Geheimnisse, welche enthalten sind in den Gegenständen...“

Dieser Ahmes überliefert uns zum ersten Mal Zahlenrechnungen auch mit Brüchen, zum Beispiel zur Berechnung von Feldern, runden Fruchthäusern und anderen Nahrungsmittelspeichern. Es tauchen auch schon geometrische Figuren wie das Dreieck, Rechteck und Paralleltrapez auf, die alle durch Benutzung des Lineals, aber ohne Zirkel konstruiert werden sollten. Bei der Berechnung des Rauminhalts „runder“ Fruchtspeicher tauchte wohl auch zum ersten Mal das Paradox auf, wie man Krummes berechnen solle. Man erkannte das Paradox der ewig gleichen Beziehung U:d in einem beliebigen Kreis.

Das Verhältnis U:d bedeutet ja Krummes : Gerades. Ist das durch einen Zahlenwert ausdrückbar, oder ist hier mehr verborgen?

Man ging auch tatsächlich daran, den Kreis auszumessen, was heute als die erste bekannte „Quadratur des Kreises“ bezeichnet wird. Ahmes gibt sogar wirklich an, wie man ein Quadrat finden könne, das die gleiche Fläche wie der vorgegebene Kreis habe: Nehmen wir an, der vorgegebene Kreis hat den Durchmesser d, dann soll nach Ahmes die Seite a des Quadrats genau der Betrag des um 1/9 seiner Länge gekürzten Kreisdurchmessers sein: a = d - 1/9 d

Daraus ergibt sich die folgende weitere Überlegung. Da die Fläche des Quadrates $F_{Quadrat} = a \cdot a$ gleich der Fläche des Kreises $F_{Kreis} = \pi \cdot (d/2)^2$ sein soll, so setzt man diese gleich und löst sie nach π auf:

$$F_{Quadrat} = F_{Kreis}$$

also:

$$a \cdot a = \pi i \cdot (d/2)^2$$

Wenn wir dann für a den Wert von Ahmes einsetzen, heißt das:

$$(d - 1/9\ d)^2 = \pi \cdot (d/2)^2$$

also:

$$(8/9) \cdot d^2 = \pi \cdot (d/2)^2$$

Und wenn man die Gleichung nach π auflöst, erhält man:

$$\pi = 4 \cdot (8/9)^2$$
$$= (16/9)^2$$

Daraus ergab sich ein Wert für π von π = 3,1604 ... Offenbar muß die Möglichkeit der Flächenberechnung des Kreises durch die Beziehung $F_{Kreis} = \pi \cdot (d/2)^2$ bekannt gewesen sein. Es gibt hier leider keine näheren bekannten Überlieferungen. Moritz Cantor bemerkte dazu in seinen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*:

„Wie man zu dieser Vorschrift gekommen sein mag, ist nicht entfernt zu erraten. Gesichert ist sie durch wiederholtes Auftreten, gesichert ist auch ihre ziemlich gute Anwendbarkeit, denn sie entspricht einem Werte π = $(16/9)^2$ = 3,1604 ... für die Verhältniszahl der Kreisperipherie zum Durchmesser, der weitaus nicht der schlechteste ist, dessen Mathematiker sich bedient haben.“ (M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 4 Bde., 1907)

Tiefergehende Forschungen zu diesem Thema sind wahrscheinlich damals nicht vorgenommen worden, und wie schon vorher bemerkt, würde dieses Ergebnis so manchen unserer Zeitgenossen vollauf zufriedenstellen. Aber sind wir durch diese Berechnung nun der wahren Ursache für die konstante Beziehung U:d näher gekommen? Sie müssen zugeben: eigentlich nicht! Und auch Nikolaus von Kues, der sich 6000 Jahre später dem Problem annahm, schrieb 1445 an seinen Freund Paolo dal Pozzo Toscanelli:

„Wohl haben die Alten, mit starkem Forschergeist begabt, in unermüdlichem Fleiß versucht, viel damals Verborgenes für sich und die Nachwelt ans Licht zu bringen; wohl haben sie in den meisten hohen und schönen Künsten mit Erfolg gearbeitet, aber in einigen der höheren Wissenszweige haben sie nicht alles Erstrebte erreicht ... Unter den Aufgaben, die bisher den geometrischen Spekulationen hindernd im Wege standen, blieb vornehmlich eine auch von allen denen ungelöst ..., nämlich: Zwischen einer geraden und einer gekrümmten Linie Gleichheit herzustellen oder eine Verwandlung ineinander zu leisten. So kam es, daß es vielen, ja fast allen, die sich dieser Untersuchung widmeten, nach unermeßlichen Mühen schien, der Weg zur Einsicht in diesen Sachverhalt sei uns entrückt, und zwar wegen der Unmöglichkeit des Unterfangens, da die Natur der Koinzidenz einer solchen Gegensätzlichkeit widerstrebe. Ich aber glaube, die Schwierigkeit dieses Unternehmens liegt vielmehr in einem zu geringen Verständnis, in mangelnder Sorgfalt und im Fehlen der äußersten Aufmerksamkeit, wie sie eine völlig ungelöste Aufgabe erfordert.“

(N. v. Kues, *Über die geometrischen Verwandlungen*)

Man kann mit Recht behaupten, daß Nikolaus Cusanus, der in diesem Jahr seinen 600. Geburtstag feiern würde, mit seinen Untersuchungen über den Kreis das menschliche Denken vollständig revolutionierte. Er eröffnete dem Menschen den Weg, die „Unendlichkeit“ zu ergreifen. Durch seine geometrischen „Verwandlungen“ — wie er seine geometrischen Untersuchungen manchmal nennt — schuf er die denkerische Grundlage für die großen naturwissenschaftlichen, mathematischen und auch musikalischen Errungenschaften der Neuzeit.

Aber nächstes Mal wollen wir uns erst einmal mit den Gedanken des großen Archimedes befassen, um dann mit Nikolaus von Kues eine neue Ebene des Denkens zu erklimmen.

Caroline Hartmann

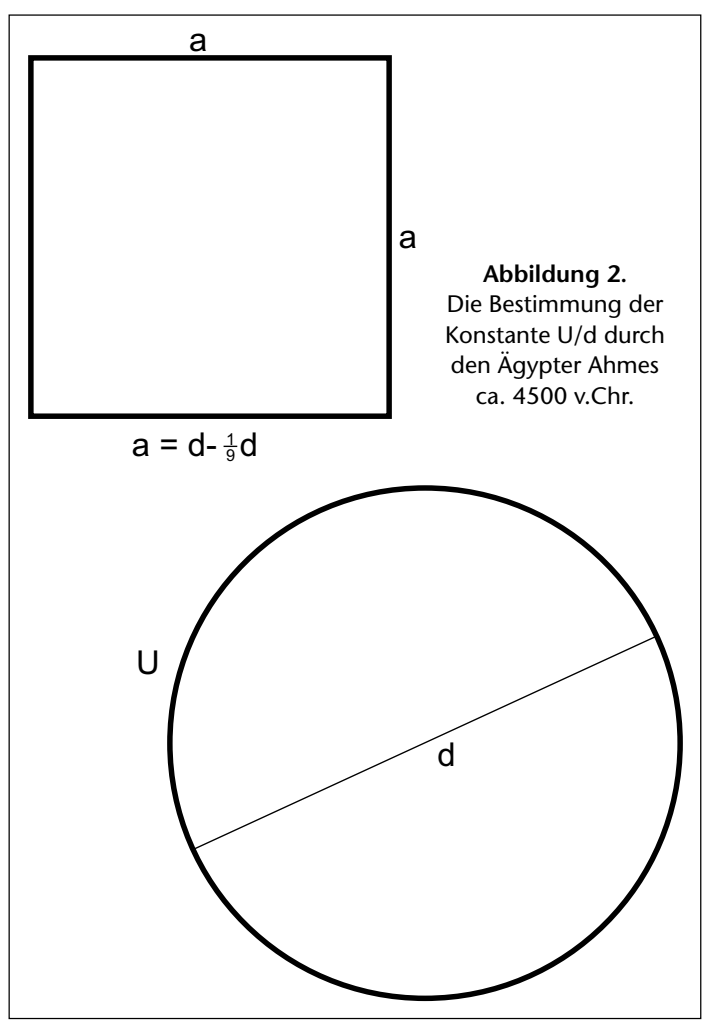

Abbildung 2.
Die Bestimmung der Konstante U/d durch den Ägypter Ahmes ca. 4500 v.Chr.