Über die Leidenschaft der Erkenntnis und die Konstanten der Natur

FOLGE 2: ARCHIMEDES UND DIE UNENDLICHEN VIELECKE

In diesem Jahr wird der 600. Geburtstag des Renaissancekardinals und Begründers der modernen Naturwissenschaften Nikolaus von Kues (1401-64) gefeiert. Caroline Hartmann inspirierte dies zu einer neuen Geometrieserie. In der ersten Folge ging es um Plancks Wirkungsquantum und das schon den alten Ägyptern bekannte, für alle Kreise konstante Verhältnis zwischen ihrem Umfang und Durchmesser: das berühmte π.

Letztes Mal haben wir bei der Betrachtung einiger konstanter Verhältnisse in der Natur festgestellt, daß es gar nicht darauf ankommt, dabei den „endgültigen", absolut genauen Zahlenwert auszurechnen. Man wird ihn ohnehin nie erreichen, da es sich dabei immer um sogenannte „irrationale" Zahlen handelt, also solche mit unendlich vielen Stellen nach dem Komma. Und auf diesem Wege werden wir niemals zu einem echten Verständnis dieser „universellen Charakteristika" gelangen.

Bei der Benennung dieser Zahlen als „irrational" müssen übrigens nicht sehr einsichtige Leute am Werke gewesen sein, denn mit „Irrationalität" hat die Erforschung von Konstanten — wir hatten begonnen, uns π ein wenig genauer anzusehen — nun gar nichts zu tun. Diese Namensgebung läßt eher darauf schließen, daß die Bedeutung solcher Konstanten gründlich mißverstanden wurde.

Wir hatten gesehen, daß sich die Ägypter schon vor 6000 Jahren mit der Berechnung runder Rauminhalte beschäftigten und mit dem Phänomen vertraut waren, daß Umfang und Durchmesser eines Kreises immer im gleichen Verhältnis zueinander stehen, unabhängig von Größe oder Beschaffenheit des Kreises. Doch die Lösung erinnerte ein wenig an jemanden, der sich mit dem Wert aus dem Taschenrechner begnügt, ohne weitere Nachforschungen anzustellen. Man konnte damit „rechnen", ohne den tieferen Sinn der Angelegenheit zu begreifen.

Nikolaus Cusanus bemerkte, daß die alten Forscher diesen Punkt nicht genügend erforscht hatten, und revolutionierte mit seinen Überlegungen das gesamte menschliche Denken. Er hatte verstanden, daß es im Kern darum ging, „zwischen einer geraden und einer gekrümmten Linie Gleichheit herzustellen oder eine Verwandlung ineinander zu leisten". Dies widerstrebe aber grundsätzlich dem menschlichen Denken, da es sich hier um eine „Koinzidenz der Extreme" handele. Er schrieb:

„So kam es, daß es vielen, ja fast allen, die sich dieser Untersuchung widmeten, nach unermeßlichen Mühen schien, der Weg zur Einsicht in diesem Sachverhalt sei uns entrückt, und zwar wegen der Unmöglichkeit des Unterfangens, da die Natur der Koinzidenz einer solchen Gegensätzlichkeit widerstrebe. Ich aber glaube, die Schwierigkeit dieses Unternehmens liegt vielmehr in einem zu geringen Verständnis, in mangelnder Sorgfalt und dem Fehlen der äußersten Aufmerksamkeit, wie sie eine völlig ungelöste Aufgabe erfordert" („Geometricis transmutationibus", übers. *Von den geometrischen Verwandlungen*).

Nun hatte bereits der große Archimedes von Syrakus nach der Untersuchung der Ägypter, die wir in der letzten Folge kennengelernt haben, viel mehr Mühe an diese Aufgabe gewandt. Doch auch seine Lösung überzeugte den Cusaner nicht, obwohl uns Archimedes das Paradoxon zwischen der „Vielheit" der Ecken und Seiten an den Kreis angenäherter Vielecke und der „Einheit" des Kreises als Inbegriff der Gekrümmtheit in jedem noch so kleinen Punkt erst in seiner ganzen Kraßheit vor Augen geführt hatte.

Archimedes begann eine sehr mühsame Untersuchung: Zuerst konstruierte er außen um einen Kreis ein Sechseck, dann halbierte er dessen Seiten, ein neues Vieleck erzeugend, und so fort. So entstanden immer mehr Vielecke um den Kreis herum, die immer mehr und immer kürzere Seiten hatten und dem Kreis immer näher rückten (siehe Abbildung 1).

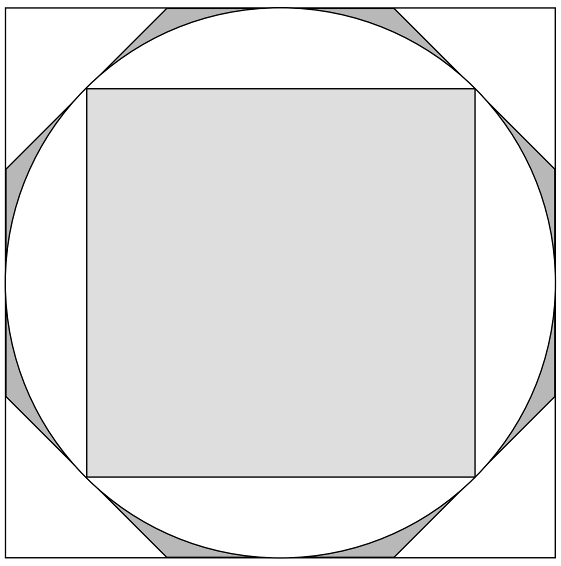

Abbildung 1
Archimedes' Konstruktion von Vielecken, die sich dem (vorgegebenen) Kreis immer mehr annähern.

Betrachten wir uns seine Anfangskonstruktion, den Kreis mit einem umschriebenen Sechseck. Hier wiederum betrachten wir eines der kleinen Dreiecke ABC und teilen die Seite durch den Punkt T, so daß wir ein rechtwinkliges Dreieck ATB vor uns haben (siehe Abbildung 2).

Wir können demnach bei diesem Dreieck mit dem Satz des Pythagoras, der hier besagt $AB^2 = AT^2 + BT^2$, arbeiten. Archimedes gibt nun geschickt Zahlenwerte an — die er ganz sicher vorher für sich selber in mühsamer Rechenarbeit erarbeitet hat —, welche immer um einen kleinen Betrag größer sind als das Verhältnis der halben Seite BT zum Radius des Kreises, dann solche, die um einen geringen Betrag größer sind als das Verhältnis der Viertelseite GT zum Kreisradius r, dann solche, die ganz wenig kleiner sind als die Achtelseite ET zum Kreisradius r und immer so weiter, bis er schließlich bis zum 96-Eck gelangt! Archimedes erhält schließlich folgende Beziehungen:

r : BT > 265 : 153
r : GT > 571 1/4 : 153 und
r : ET > 1162 1/8 : 153.

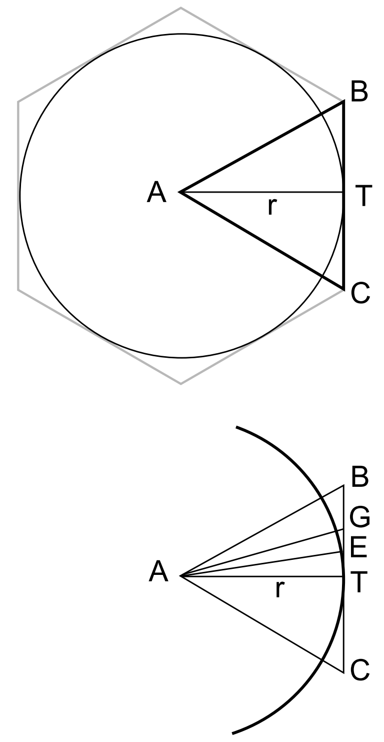

Abbildung 2
Durch immer weitere Seitenhalbierungen der Dreiecksseite BC (im Sechseck, das den Kreis umschließt) versuchte Archimedes sich dem Kreisumfang rechnerisch anzunähern.

Der Umfang des Sechsecks ist dabei, wenn man die Zeichnung betrachtet, $U_6 = 12 \cdot BT$, der Umfang des Zwölfecks $U_{12} = 24 \cdot GT$ und der Umfang des Vierundzwanzigecks beträgt $U_{24} = 48 \cdot ET$. Wir wollen hier nicht Archimedes' gesamte Prozedur von Winkelhalbierungen, Vergleich von Verhältnissen und Einsetzen von ungefähr richtigen, aber immer etwas zu großen oder zu kleinen Größen vorführen (wer darüber mehr lesen will, kann sich in Moritz Cantors Werk *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* schlau machen).

Um aber einen Eindruck von der mühseligen Rechenarbeit zu geben, sei hier nur das Resultat seiner Rechnungen gezeigt: Er erhielt für das Verhältnis r : U_{96} > 4673 1/2 : 29 376, oder andersherum ausgedrückt, wenn man den Durchmesser d = 2r des Kreises betrachtet: U_{96} : d < 14 688 : 4673 1/2, und dieses Verhältnis ist wiederum kleiner als 3 10/70 : 1. Dadurch hat nun Archimedes die obere Grenze seines Werts festgelegt und beginnt dann das gesamte Vorgehen noch einmal für die eingeschriebenen Vielecke, wodurch er letztendlich auf die Beziehung 3 10/71 < U : d < 3 10/70 kommt. Dabei ist zwar der Wert des Verhältnisses U:d „eingekreist", doch so richtig errechnet sind die Rahmenwerte tatsächlich nur für das 96-Eck.

Bei Betrachtung dieser Untersuchung des Archimedes staunen wir zwar über die große Genauigkeit, die er mit seiner Idee der Kreisannäherung erreichte, doch die Frage, ob wir jetzt mehr über das „Warum?" der immer gleichen Proportionalität zwischen Umfang und Kreisdurchmesser herausgefunden haben, müssen wir verneinen. Ja, durch Archimedes' Untersuchung wird sogar erst recht deutlich, wie extrem unterschiedlich gerade und krumme Linien sind. Scheinbar eine unendliche Geschichte und ein krasser Gegensatz!

Nikolaus Cusanus schrieb darüber an seinen Freund Paulus (Paolo dal Pozzo Toscanelli):

„Es gab sorgsame und genaue Gelehrte, allen voran Archimedes, die gezeigt haben, daß der Kreisumfang im Verhältnis zum Durchmesser größer ist als 3 10/71 und kleiner als 3 10/70, und daß dieser Näherungswert fortwährend genauer gemacht werden kann. Sie haben uns aber nicht überliefert, wo der zahlenmäßig nicht erreichbare genaue Wert verborgen ist..." (*Von den geometrischen Verwandlungen*).

Wir haben es mit zwei absoluten Gegensätzen zu tun: auf der einen Seite den Kreis als Inbegriff des „Krummen", der in jedem noch so kleinen Punkt eine Krümmung hat, und auf der anderen Seite lauter gerade Seiten — mit jedem Vieleck mehr. Dies bietet noch eine zusätzliche Absurdität, denn, auch wenn wir es schafften, z.B. mit einem Vieleck von 65 536 Seiten ganz nah an den Kreisumfang heranzukommen und ein Abstand nur noch mit der Lupe feststellbar wäre, sind wir doch um so weiter vom Kreis entfernt, der ja nicht eine einzige Ecke besitzt (siehe Abbildung 3).

Wir stehen hier nicht nur vor einem geometrischen Paradoxon, sondern auch einer scheinbar unüberwindlichen Aufgabe für unseren Geist, wie es Nikolaus von Kues ausdrückt,

„...denn da Vieleckfiguren nicht Größen der nämlichen Art sind wie die Kreisfigur, gilt, selbst wenn sich ein Vieleck finden ließe, das einem gegebenen Kreis der Größe nach näher kommt als ein anderes, trotzdem der Satz: *Bei Dingen, die ein Größer und Kleiner zulassen, gelangt man nicht zu einem schlechthin Größten im Sein und in der Möglichkeit (in esse et posse)*.

Die Kreisfläche ist nämlich im Vergleich zu den Vieleckflächen, die ein Größer und Kleiner zulassen und die Kreisfläche daher nicht erreichen, das schlechthin Größte, so wie die Zahlen nicht die Fassungskraft der Einheit erreichen und die Vielfachheiten nicht die Kraft des Einfachen." („De circuli quadratura", *Von der Quadratur des Kreises*).

Die Einheit (des Kreises) ist unwandelbar und ewig, dagegen ist die „Vielheit" aller Dinge einer ständigen Änderung, einem Größer- und Kleinerwerden unterworfen. Der Cusaner erklärt auch, warum uns die Aufgabe, diese Gegensätze zu vereinen, so unlösbar erscheint:

„Dies überschreitet aber alle unsere Vernunft, die in ihrem Ursprung die Widersprüche nicht auf dem Wege des Denkens vereinigen kann, da wir nur durch das, was uns von Natur einsichtig ist, voranschreiten. Unsere Vernunft aber bleibt weit hinter diesem unendlichen Vermögen zurück und kann daher die unendlich weit voneinander abstehenden Glieder des Widerspruchs nicht verbinden..." (*Von der Quadratur des Kreises*)

Will er aber nur sagen: „Lieber Archimedes bzw. liebe Nachwelt, hier seht Ihr, daß es so nicht geht?" Nein, genau das Gegenteil. Er hat eine faszinierende Idee, um den Weg aufzuzeigen, auf dem es dem menschlichen Geist schließlich doch gelingen wird, diese Aufgabe zu lösen. Er führt uns Schritt für Schritt zur Erkenntnis der Koinzidenz der Extreme, doch nicht durch „Annäherung" an irgendeinen Zahlenwert, sondern durch einen lebendigen Prozeß, bei der er sich die beständige Arbeit des menschlichen Geistes zunutze macht und die Geometrie und Mathematik als Werkzeug dazu gebraucht:

„Der beste Erhalter aller Dinge hat es nämlich so bestimmt, damit die göttliche Kraft des Erkennens in uns nicht erlahme, sondern durch immer lebhafteres Interesse auf das noch Verborgene, aber der Erkenntnis Zugängliche gelenkt werde. Wir geben uns leidenschaftlich der Erforschung des Dunkels hin, damit wir uns um so ruhiger der Stärke unseres Geistes erfreuen" (*Von den geometrischen Verwandlungen*).

Abbildung 3
Ein einbeschriebenes Vieleck mit 216 (65 336) Seiten sieht scheinbar wie ein Kreis aus.