

# Die Bedeutung von Bernhard Riemann heute

Von Bruce Director



*Jeder, der – insbesondere in der heutigen Krisenzeit – wichtige Fragen der Politik, Wirtschaft und Wissenschaft genauer verstehen will, ist gut beraten, sich mit der größeren Tragweite von Riemanns Werk vertraut zu machen.*

Links: Ein Porträt Bernhard Riemanns (1826-1866) von 1863. (Wikimedia)

Bernhard Riemanns Habilitationsschrift ist der bekannteste und auch dem Nichtwissenschaftler zugänglichste Ausdruck der revolutionären Entdeckungen dieses großen Wissenschaftlers. Doch jeder, der – insbesondere in der heutigen Krisenzeit – wichtige Fragen der Politik, Wirtschaft und Wissenschaft genauer verstehen will, ist gut beraten, sich mit der größeren Tragweite von Riemanns Werk vertraut zu machen.

Dabei wird man auf viele erstaunliche Ergebnisse stoßen, die die Grundlage für praktisch alle wichtigen Entwicklungen in der Wissenschaft der letzten anderthalb Jahrhunderte bilden, aber noch darüber hinaus Einblicke in einen kreativen Denker liefern, der mit seiner eigenen Kreativität die Prinzipien entdeckte, auf denen das Universum aufgebaut ist. Diese Qualität des Denkens braucht die Welt heute wieder ganz dringend.

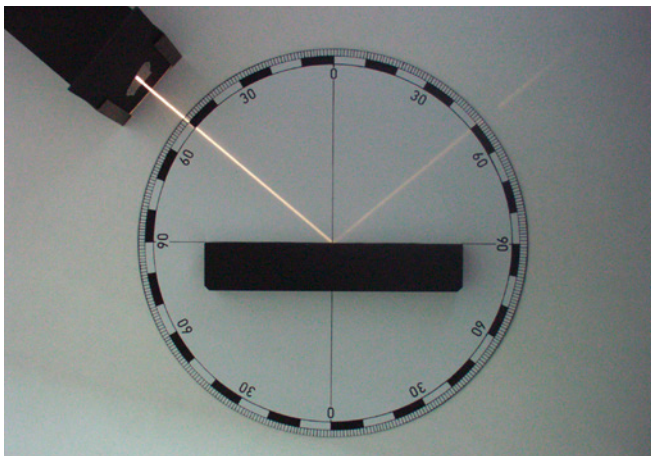
Ich möchte einige Beispiele hierfür anführen, angefangen mit Riemanns frühesten Veröffentlichungen.

Zu der Zeit, als Riemann 1846 nach Göttingen kam, um bei Gauß zu studieren, war er bereits zu dem Schluß gekommen, daß neue Entdeckungen in der Wissenschaft nur zustande kommen könnten, wenn man die lähmende Denkweise beseitigt, die seit dem Aufstieg Immanuel Kants in Deutschland vorherrschend geworden war. Auch Gauß war sich dessen bewußt und hatte sich in seinen früheren Jahren

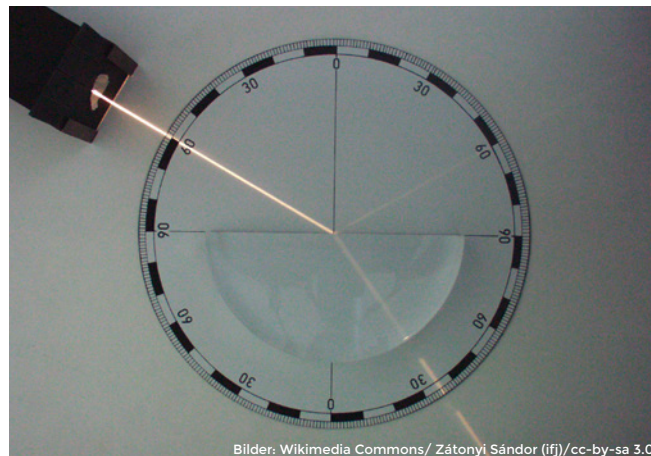
recht offen dagegen gewehrt, aber nach dem Aufstieg Napoleons und der anschließenden Reaktion hatte er die meisten seiner Gedanken hierüber unter Verschuß gehalten.

Kant hatte in Reaktion auf Leibniz' große Errungenschaften wieder die aristotelische Trennung des Geistes vom Universum aufgebracht, um so die Wissenschaft vom kreativen Denken abzuschotten. Es war Kants Diktum, daß reines Denken nur durch eine Reihe von Regeln vonstatten gehen könnte, die von sämtlicher Realität außerhalb des Geistes abstrahiert wären. Somit könnte man ein verlässliches System der reinen Vernunft nur konstruieren, wenn es von der ungebärdigen Welt materieller Dinge und der unzuverlässigen Erscheinungswelt abgeschirmt wäre.

Das Problem dabei war, daß ein solches System ebenso impotent wie nutzlos ist. Das störte Kant aber wenig, denn er entwickelte ein System der praktischen Vernunft und anderer Kompromisse, um sich mit der realen Welt auseinanderzusetzen, solange diese Welt durch eine kontrollierende Oligarchie (menschlicher oder göttlicher Art) in Ordnung gehalten würde. Sein System diente damit dazu, das schöpferische Denken in Wissenschaft, Kunst und Politik zu lähmen, was jedoch durch prometheische Menschen wie Wolfgang Amadeus Mozart, Ludwig van Beethoven, Friedrich Schiller, Franz Schubert, Abraham Gotthelf Kästner und Carl Friedrich Gauß durchbrochen wurde.



**Abbildung 1** Reflexion eines Lichtstrahls an einer spiegelnden Oberfläche.



**Abbildung 2** Brechung (unterer Lichtstrahl) und Reflexion (oberer Lichtstrahl) eines Lichtstrahls an einem Plexiglas-Halbkreiskörper

Bilder: Wikimedia Commons/ Zátanyi Sándor (ifj)/cc-by-sa 3.0

## Von Leibniz zu Riemann

Der scheinbar sicherste Zufluchtsort für den Kantianismus war die reine Mathematik, und hierin wieder die Algebra und die Zahlentheorie, denn diese Bereiche waren in Kants Denken Schöpfungen der reinen Vernunft und konnten durch die widerspenstige Welt der Materie und des Geistes nicht verunreinigt werden. Allerdings spukte in dieser Welt der reinen Logik ein unwillkommener Geist herum: die Wurzel aus  $-1$ , die das innere Heiligtum der reinen Vernunft so in Verwirrung stürzte, daß sie sich die Bezeichnung *unmöglich* oder *irrational* einhandelte.<sup>1</sup>

In Wirklichkeit ist die Wurzel aus  $-1$  gar nicht unmöglich. Sie taucht wiederholt in algebraischen oder Zahlensystemen auf.<sup>2</sup> Sie war nur „unmöglich“, weil ihre Bedeutung in der realen Welt und nicht in der abstrakten Welt der reinen Vernunft lag. Gauß betonte, daß das Konzept „imaginärer“ Zahlen wie bei den negativen Zahlen nicht durch die Befolgung formaler Rechenregeln, sondern durch den physischen Steuerungsprozeß abgeleitet werde, der, wie er im Gegensatz zu Kant behauptete, nicht aus der „reinen Vernunft“ abgeleitet werden könnte.<sup>3</sup> In seiner eigenen Doktorarbeit über den Fundamentalsatz der Algebra hatte Gauß genau das aufgezeigt, was damals bei ihrem Erscheinen einigen Wirbel ausgelöst hatte. Aber obgleich seine

Notizhefte mit vielen Überlegungen über die Frage der späteren komplexen Zahlen angefüllt sind, hat er darüber fast nichts veröffentlicht.

In diesem Umfeld tauchte Riemann auf, der sich Gauß als seinen Doktorvater ausgesucht hatte. 1851 betreute Gauß Riemanns revolutionäre Dissertation über „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe“. Zwar wird diese Arbeit oft fälschlicherweise in den Bereich der reinen Mathematik eingeordnet, doch jeder, der sich mit Gauß und Riemann auseinandergesetzt hat, weiß, daß dies nicht stimmt. Tatsächlich legte Riemann in seiner Dissertation und seinen anderen Arbeiten über die Abelschen und hypergeometrischen Funktionen eine Methode physikalischen Denkens fest, welche die Beziehung zwischen der Funktion des Geistes und des physischen Universums offenlegte. Nur wenn man ein tieferes Verständnis des ersteren erlangte, könnte die Wissenschaft hoffen, etwas Sinnvolles über letzteres herauszufinden.

Riemanns Denken gründet in Leibniz' Idee der *geringsten Wirkung* und der *analysis situs*. Leibniz hatte im Widerspruch zu Descartes und den Pragmatisten seiner Zeit darauf bestanden, daß sich im Universum nichts Irrationales abspiele, da ansonsten der menschliche Geist bedeutungslos würde. Dementsprechend muß das Universum auf Prinzipien fußen, die zwar nicht direkt von den Sinnen beobachtet, aber dennoch vom Geist begriffen werden können. Eines dieser Konzepte ist das Prinzip der geringsten Wirkung.

Dies läßt sich am besten an einem Beispiel veranschaulichen. Wenn ein Lichtstrahl auf einen Spiegel trifft, wird er im gleichen Winkel reflektiert, wie er eingefallen ist (*Abbildung 1*). Diese Beobachtung läßt sich im Bereich der Sinneswahrnehmung bestätigen. Aber mit der Sinneswahrnehmung läßt sich nicht die Frage beantworten, *warum* sich das Licht so verhält. Die Formulierung dieser Frage und ihrer Antwort ist ein geistiger Akt, mit dem wir auf das Universum einwirken. Bereits Wissenschaftler der Antike hatten erkannt, daß die Gleichheit des Einfallswinkels und des Ausfallswinkels bedeutet, daß der Gesamtweg des Lichtes die kürzestmögliche Entfernung darstelle. Ist das eine allgemeine Eigenschaft des Lichtes – oder ein Sonderfall, der nur auf dieses besondere Phänomen anwendbar ist?

Wenn ein Lichtstrahl zwei unterschiedliche Medien, wie etwa Luft und Wasser, durchquert, sind Einfallswinkel und

1. Mit dem Buchstaben  $i$  bezeichnet.

2. Zum Beispiel läßt sich der abstrakte algebraische Ausdruck  $x^2 - y^2$  in  $(x+y)(x-y)$  auflösen. Aber der Ausdruck des physisch realen pythagoreischen Satzes  $x^2 + y^2$  läßt sich algebraisch nur in  $(x+iy)(x-iy)$  auflösen. Ähnlich zeigte Gauß, daß Primzahlen, die scheinbare Grundfeste aller Zählnummern, auf unmöglichen Zahlen beruhen, wie beispielsweise im Fall sämtlicher  $4n+1$ -Primzahlen wie die 5. Solche Zahlen sind keine wirklichen Primzahlen, da sie sich auflösen lassen, wie etwa  $5 = (2+i)(2-i)$ .

3. Siehe Gauß' „Zweite Abhandlung über die biquadratischen Reste“, die Riemann in seiner Habilitationsschrift erwähnt. Gauß bemerkt darin, daß der Begriff positiver und negativer Zahlen Größen bezeichnet, die in unterschiedlichen Richtungen angeordnet sind, und daß „imaginäre“ Zahlen Größen bezeichnen, die sich orthogonal zu den „realen“ Zahlen befinden. Er behauptete die Existenz einer dritten Zahlenreihe orthogonal zu den realen und imaginären Zahlen, hat diese Idee aber nie weiter ausgeführt. Riemann zeigte, daß dies nicht erforderlich sei.

Ausfallswinkel nicht gleich,<sup>4</sup> und folglich ist der Weg des Lichtes nicht mehr die kürzeste Entfernung (Abbildung 2). Wird dadurch das Prinzip verletzt, das man bei der Reflexion beobachtet hat?

Pierre de Fermat (1601-65) zeigte, daß das Verhalten des Lichtes bei der Brechung tatsächlich nicht gegen das Prinzip des bei der Reflexion beobachteten kürzesten Weges verstößt, sondern vielmehr ein höheres Konzept von „Weg“ ausdrückt. Da das Licht zwischen den Medien seine Geschwindigkeit ändere, müsse man unter kürzestem Weg einen Weg der *geringsten Zeit* verstehen.

Leibniz betrachtete das Verhalten des Lichts als Ausdruck eines allgemeineren Konzepts, das er das „Prinzip der geringsten Wirkung“ nannte, worin sich, wie er betonte, die funktionelle Übereinstimmung der schöpferischen Fähigkeiten des menschlichen Geistes und der Organisation des Universums selbst widerspiegeln.

Auf dieser Grundlage schuf Riemann eine vollkommen andere Art des Denkens. Er kam auf den Gedanken, daß sich die Untersuchungen der Physik nicht auf Phänomene, sondern auf physikalische Mannigfaltigkeiten gründen müßten. In zahlreichen Arbeiten entwickelte er den Begriff einer physikalischen Mannigfaltigkeit als einheitliche Konzeption, unter der eine Vielfalt physikalischer Prinzipien wirksam ist. Die Natur der Mannigfaltigkeit, die dem Geist, aber nicht der Sinneswahrnehmung zugänglich ist, bestimmt die untersuchten Phänomene. Abstrakte Geometrien und formale mathematische Strukturen werden damit hinfällig.

## Physikalische Mannigfaltigkeiten

Aus Riemanns Sicht ist beispielsweise das unterschiedliche Verhalten eines reflektierten und gebrochenen Lichtstrahls nicht der Effekt zweier unterschiedlicher Phänomene, sondern des gleichen Phänomens, das sich in Mannigfaltigkeiten unterschiedlicher Wirkgrade äußert. Reflexion erfolgt in einer Mannigfaltigkeit, in der sich nur die Richtung ändert, wohingegen Brechung in einer Mannigfaltigkeit stattfindet, in der sich Richtung und Geschwindigkeit ändern.<sup>5</sup> Was unverändert geblieben ist, ist das bestimmende Prinzip der geringsten Wirkung. Der Ausdruck der geringsten Wirkung läßt sich somit als Funktion der Eigenschaften der Mannigfaltigkeit verstehen.

Riemann entdeckte, daß der Bereich der komplexen Zahlen mit ihrem Ursprung in der Wechselwirkung zwischen Geist und Natur besonders geeignet wäre, um die entscheidenden Merkmale einer physikalischen Mannigfaltigkeit auszudrücken. Er nannte das entsprechende Prinzip das „Dirichlet-Prinzip“,<sup>6</sup> welches besagt, daß jede geschlossene Mannigfaltigkeit das Prinzip der geringsten Wirkung auf besondere Weise ausdrückt. Riemann erkannte, daß dies in einem System von Kurven minimaler und maximaler Krümmung

zum Ausdruck kommt, welche stets senkrecht zueinander stehen.<sup>7</sup> Da Orthogonalität ein physikalischer Ausdruck komplexer Zahlen ist, sind Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe besonders geeignet, um das Prinzip der geringsten Wirkung in physikalischen Mannigfaltigkeiten auszudrücken.

Auf dieser Grundlage entwickelte Riemann eine allgemeine Mannigfaltigkeitslehre, in der er zeigte, daß nur eine geringe Zahl von Parametern, insbesondere die Grenzbedingungen und die Zahl der Singularitäten, die charakteristischen Wege der geringsten Wirkung bestimmen.

Riemann ging noch weiter. Der Wissenschaftler genauso wie der Staatsmann oder Militärführer müssen die Charakteristika einer Mannigfaltigkeit als aktive Teilnehmer an dem Vorgang entdecken. Friedrich Schiller beschrieb dies so, daß man politische Freiheit schaffen müsse, so als wenn „das lebendige Uhrwerk des Staats gebessert werden muß, indem es schlägt“. Dazu muß man in der Lage sein, die globalen Eigenschaften einer Mannigfaltigkeit von ihrer infinitesimalen Wirkung zu unterscheiden.

Ein solcher Ansatz war für Riemann nicht neu. Johannes Kepler war zu seinen Erkenntnissen gekommen, indem er die allgemeinen Eigenschaften des Sonnensystems über einen sich darin bewegenden Planeten bestimmte und dabei die Veränderungen im infinitesimal Kleinen erkannte. Somit drückte jeder kleinste Abschnitt der Planetenbewegung die Gesamtcharakteristik des Sonnensystems insgesamt aus, wie Kepler es verstand.

Heute wissen wir, daß auch galaktische und intergalaktische Prozesse hierbei eine Rolle spielen. Das hatte auch Riemann erkannt, der in seiner Habilitationsschrift hervorhob, daß man in der Wissenschaft das sehr Große und das sehr Kleine betrachten müsse, um die Natur zu verstehen.

Keplers Ansatz wurde von Leibniz zur Infinitesimalrechnung weiterentwickelt, der damit eine allgemeinere Methode formulierte, die er *analysis situs* nannte. Bei seinen Untersuchungen über Geodäsie und den Erdmagnetismus erweiterte Gauß Leibniz' Methode, indem er zeigte, daß man globale Charakteristika wie Krümmung und kürzesten Weg (in der Geodäsie) aus infinitesimal kleinen Messungen bestimmen könne. So hat Gauß als erster die Charakteristika des Erdmagnetfeldes und den Ort des magnetischen Südpols allein aus einer sorgfältigen *analysis situs* geringfügiger lokaler Schwankungen des Erdmagnetfeldes berechnet.

Aber Riemann führte dies noch weiter. Mit seiner Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe schuf Riemann das Mittel, mit der die wesentlichen physikalischen Eigenschaften einer allgemeinen Mannigfaltigkeit aus sehr kleinen Messungen erkannt werden konnten, wodurch er den Vorrang von Konzepten vor Berechnungen in der Wissenschaft wiederherstellte. Jeder, der heute auf politischem oder wirtschaftlichem Gebiet eine führende Rolle übernehmen will, sollte Riemanns Methode unbedingt verstanden haben.

Die Formulierung von Riemanns Theorie komplexer Funktionen gibt uns einen Einblick in sein konzeptionelles Denken. Aber er war kein bloßer Theoretiker. Riemann wendete diese Methode auf einige der dringendsten Probleme in der Physik seiner Zeit an – auf den Bereich des Elektromagnetismus, der Hydrodynamik und der Geodäsie. Seine Bemühungen in diesen Bereichen der angewandten Physik führten wiederholt zu Entdeckungen, die zeigten, daß die

4. Auch wenn Einfallswinkel und Ausfallswinkel nicht gleich sind, steht aber der Sinus dieser Winkel in einem konstanten Verhältnis.

5. Ersteres ist eine Mannigfaltigkeit des Raums, während letzteres eine Mannigfaltigkeit der Raumzeit ist.

6. Benannt nach Lejeune Dirichlet, seinem Vorgänger in Göttingen. Dirichlet war ein Schützling von Gauß und Alexander von Humboldt. Riemann hatte ein Jahr lang bei Dirichlet in Berlin studiert. Als Ehemann Rebecca Mendelsohns war Dirichlet, als er nach Göttingen kam, an der Zusammenarbeit von Musikern und Wissenschaftlern beteiligt; Riemann war ebenfalls Teil dieser Zusammenarbeit.

7. Riemanns Arbeit hierbei ist eine Verallgemeinerung von Gauß' Potentialbegriff.

reduktionistischen Methoden, die damals weit verbreitet waren, nicht nur konzeptionell unterlegen waren, sondern auch zu falschen Ergebnissen führten.

## Physik und Leben

Eines der besten Beispiele hierfür ist Riemanns Arbeit über Stoßwellen, wie sie später genannt wurden. In einem komprimierbaren Medium wie Luft erscheinen Schallwellen als Bereiche abwechselnder Verdichtung und Verdünnung der Luft. Es ist eine bekannte Beobachtung, daß sich solche Wellen mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten, die von Frequenz (Tonhöhe) und Amplitude (Lautstärke) der Welle unabhängig ist. Aus obiger Beschreibung und der mathematischen Analyse einer Wellenfunktion könnte es so erscheinen, daß diese endliche Geschwindigkeit des Schalls eine begrenzende Größe ist, die nicht überschritten werden kann. Riemann sah das allerdings ganz anders. Er erkannte, daß sich ein neuer Organisationszustand einstellt, wenn die abwechselnden Verdichtungs- und Verdünnungsregionen einander überholten, wodurch eine neue Struktur entstand, die sich durch die Luft mit eigener Geschwindigkeit fortpflanzte, als wenn sie selbst ein materielles Objekt wäre. Heute sind solche Strukturen gemeinhin als „Stoßwellen“ bekannt. Riemanns Hypothese über Stoßwellen wurde von der damaligen Fachwelt als lächerlich abgetan. Nach seinem Tod gab ihm der experimentelle Nachweis von Stoßwellen recht und ließ seine Kritiker als kurzsichtig dastehen. Einmal mehr hatte Riemann gezeigt, daß nicht mathematischer Formalismus, sondern der menschliche Geist die Welt widerspiegelt.

Gegen Ende seines Lebens begann Riemann seine lange gehegte Überzeugung zu erforschen, daß Fortschritt in der Wissenschaft nur möglich wäre, wenn die Grenze zwischen unbelebter Physik und lebenden Organismen überwunden würde. In seiner letzten Arbeit stellte Riemann seine Forschungsergebnisse über den Mechanismus des menschlichen Gehörs dar. Wenn man wie Hermann von Helmholtz das Ohr wie einen unbelebten Mechanismus analysiert, nimmt der Mensch einen Ton wahr, wenn Druckwellen der Luft auf das Trommelfell treffen, welches wiederum drei winzige Knochen im Mittelohr (Hammer, Amboß und Steigbügel) in Gang setzt, welche wiederum eine Welle in der Innenohrflüssigkeit auslösen, die dann kleine Härchen in Schwingung versetzt, die diese Schwingungen in elektrische Impulse verwandeln, die dann im Gehirn als Ton wahrgenommen werden.

Mit diesem Ansatz wird versucht, Funktionen in einem Lebewesen zu erklären, als wenn sie eine Ansammlung unbelebter physikalischer Maschinen wären. Riemann stellte fest, daß dies vollkommen widersinnig ist. Wäre Helmholtz' Theorie richtig, wäre der Mensch nicht in der Lage, die sehr geringfügigen Veränderungen in Klangfarbe, Lautstärke, Tonhöhe und Schattierung zu hören, die das Wahrnehmungsvermögen für Sprache und polyphone Musik darstellen. Riemann starb zwar, bevor er seinen Ansatz zum Verständnis des Gehörs weiter ausführen konnte, aber seine Untersuchung bringt die spannende und provozierende Idee auf, daß alle Untersuchungen physikalischer Prozesse dem höheren Konzept des Lebens untergeordnet werden müssen. Damit legte Riemann die Grundlage für die entsprechenden Durchbrüche von Wladimir Wernadskij und bereitete den Weg für neue Bereiche der Wissenschaft, die noch erforscht werden müssen.

Mit diesem Ansatz beschäftigte sich Riemann nicht erst am Ende seines Lebens. Als man nach seinem Tod seine Papiere durchsah, fand man eine Reihe von Aufzeichnungen über die Seele, das Leben und über Philosophie, die uns genauer erkennen lassen, woher er seine erstaunlichen Fähigkeiten nahm, weit über die äußeren Erscheinungen hinaus zu blicken. Diese posthum als *Philosophische Fragmente* veröffentlichten Schriften zeigen, daß am Anfang seines gesamten Denkens über Physik höchste Wertschätzung der kreativen Fähigkeiten des menschlichen Geistes stand. Seine Vorstellung über die Funktionsweise des Geistes drückt sich in seinem Denken darüber aus, wie die reale Welt funktioniert.

Riemann selbst schreibt in den *Philosophischen Fragmenten*:

*„Mit jedem einfachen Denkkakt tritt etwas Bleibendes, Substantielles in unsere Seele ein. Dieses Substantielle erscheint uns zwar als eine Einheit, scheint aber (insofern es der Ausdruck eines räumlich und zeitlich ausgedehnten ist) eine innere Mannigfaltigkeit zu enthalten; ich nenne es daher ‚Geistesmasse‘. – Alles Denken ist hiernach Bildung neuer Geistesmassen.*

*Die in die Seele eintretenden Geistesmassen erscheinen uns als Vorstellungen; ihr verschiedener innerer Zustand bedingt die verschiedene Qualität derselben.*

*Die sich bildenden Geistesmassen verschmelzen, verbinden oder komplizieren sich in bestimmtem Grade, teils untereinander, teils mit älteren Geistesmassen. Die Art und Stärke dieser Verbindungen hängt von Bedingungen ab, die von [Johann Friedrich] Herbart nur zum Teil erkannt sind und die ich in der Folge ergänzen werde. Sie beruht hauptsächlich auf der inneren Verwandtschaft der Geistesmassen.*

*Die Seele ist eine kompakte, aufs Engste und auf die mannigfaltigste Weise in sich verbundene Geistesmasse. Sie wächst beständig durch eintretende Geistesmassen, und hierauf beruht ihre Fortbildung.*

*Die einmal gebildeten Geistesmassen sind unvergänglich, ihre Verbindungen unauflöslich; nur die relative Stärke dieser Verbindungen ändert sich durch das Hinzu-kommen neuer Geistesmassen.*

*Die Geistesmassen bedürfen zum Fortbestehen keines materiellen Trägers und üben auf die Erscheinungswelt keine dauernde Wirkung aus. Sie stehen daher in keiner Beziehung zu irgendeinem Teile der Materie und haben daher keinen Sitz im Raume.*

*Dagegen bedarf alles Eintreten, Entstehen, alle Bildung neuer Geistesmassen und alle Vereinigung derselben eines materiellen Trägers. Alles Denken geschieht daher an einem bestimmten Ort.“*

In anderen Fragmenten bemerkte Riemann, daß die Entstehung von Geistesmassen ein überaus sozialer Prozeß ist, vermittelt durch Kultur und Sprache innerhalb und über die Generationen hinweg. Er stellte außerdem fest, daß die Entwicklung von Ideen im Menschen der höchste Ausdruck eines universellen Prozesses ist, der die belebten und die unbelebten Bereiche umschließt.

Um weiter überleben zu können, muß die Menschheit dringend zu dem wissenschaftlichen Denken eines Bernhard Riemann zurückkehren. Ein erster Schritt dorthin wäre, wiederzuentdecken, was Riemann tatsächlich geleistet und gedacht hat, denn davon hat heute kaum jemand – mit Ausnahme Lyndon LaRouches – noch eine Ahnung.