Über die Leidenschaft der Erkenntnis und die Konstanten der Natur

Folge 7: Die Kunst, zur Koinzidenz der Extreme zu gelangen

In diesem Jahr wird der 600. Geburtstag des Renaissancekardinals und Begründers der modernen Naturwissenschaften Nikolaus von Kues (1401-64) gefeiert. Caroline Hartmann inspirierte dies zu dieser Geometrieserie. Darin geht es um die besondere Herangehensweise des Cusaners an die „Quadratur des Kreises“ als Beispiel für die Art und Weise, wie der menschliche Geist überhaupt zu neuen Erkenntnissen gelangt.

Unsere Untersuchung, Gerades mit Krummem zu vergleichen, hat letztes Mal einige Paradoxa aufgeworfen. Wir hatten – ausgehend vom Dreieck – versucht, durch Bildung von immer mehr isoperimetrischen Vielecken den dazu umfangsgleichen Kreis zu finden, und dabei die Entdeckung gemacht, daß die Radien der jeweiligen In- und Umkreise der Vielecke sich mit wachsender Seitenzahl zum Mittelpunkt der oberen Dreieckseite „bewegen“.

Wir mußten aber erkennen, daß wir in unserem rein verstandesmäßigen Begreifen eine Schranke finden, die uns die Vorstellung eines irgendwo im Unendlichen liegenden, aber trotzdem genauen Punktes X, durch den letztendlich der Radius des isoperimetrischen Kreises hindurchgehen soll, verwehrt. Mit Nikolaus Cusanus wollen wir aber dennoch genau diesen Punkt finden. Laut Nikolaus kann der menschliche Geist durch einen Prozeß des Unterscheidens und Vergleichens seine Erkenntniskraft ausreichend vergrößern, um ein Paradoxon zu begreifen. Dieses Paradoxon besteht in unserer Untersuchung darin, daß wir das Verhältnis zwischen dem „krummen“ Kreisumfang zu seinem „geraden“ Durchmesser verstehen wollen. Hören wir den Cusaner selbst:

> „Vieleckfiguren mit gleichlangen Seiten nennt man isopleure; wenn sie bei gleicher Seitenlänge den nämlichen Umfang haben, heißen sie isoperimetrisch. Unter allen isoperimetrischen Figuren hat bekanntlich das Dreieck die kleinste Fläche. Da eine isoperimetrische Figur um so mehr Fläche einschließt, je mehr Winkel sie hat, wird der Kreis unter allen isoperimetrischen Figuren die größte Fläche haben. Durch Vervielfachen der Winkel kann man ihn nicht erreichen, wie man auch bei der Zahl nicht zu einem Maximum kommen kann. Kein Vieleck kann zum isoperimetrischen Kreis ein rationales Verhältnis haben.
> Weil aber die Flächendifferenz umfangsgleicher Figuren der Differenz der Halbmesser (Radien) ihrer einbeschriebenen Kreise entspricht (wie schon früher bekannt war), deshalb wird weder der einbeschriebene Kreis, der kleiner ist, noch der umbeschriebene Kreis, der größer ist, zum isoperimetrischen ein rationales Verhältnis haben. Die Differenz der Halbmesser besagter Kreise ist beim Dreieck am größten, bei anderen Vielecken wird sie schrittweise kleiner. Beim isoperimetrischen Kreis fallen die Halbmesser zusammen, da hier Inkreis, Umkreis und Kreis selbst zusammenfallen. Es ist also zu untersuchen, durch welche Kunst wir zur Koinzidenz und zu unserm Ziel gelangen können.“
> („De geometricis transmutationibus“, *Von den geometrischen Verwandlungen*)

Betrachten wir uns noch einmal das Dreieck ABC. Wir hatten gesehen, daß die Schnittpunkte der Umkreisradien mit der oberen Seite des Dreiecks bei den verschiedenen isoperimetrischen Vielecken unterschiedlich weit vom Eckpunkt B und dem Seitenmittelpunkt F entfernt ist. Er nähert sich F und rückt von B ab, je mehr Seiten das Vieleck hat bzw. je größer die Vieleckfläche wird (siehe *Abbildung 1*).

Wie sich also dieser Punkt in Vielecken mit wachsender Fläche der Seitenmitte (bzw. einem Punkt zwischen Seitenmitte und Dreiecksecke) stetig nähert bis zum Zusammenfallen dieser drei Punkte im größten Vieleck, so rückt er notwendig in den Vielecken mit geringerer Fläche von F ab, bis er im kleinsten Vieleck wieder am Eckpunkt B anlangt.

In seiner Schrift *Über die Vermutungen* schreibt Nikolaus von Kues:

> „Die Genauigkeit der Wahrheit ist unerreichbar. Daraus ergibt sich, daß der Mensch nur in der Weise der Vermutung zu wahren Aussagen gelangen kann. Denn im Erfassen des Wahren gibt es eine unaufhörliche Steigerung. Deshalb steht auch unser tatsächliches Wissen in keinem Verhältnis zu jener höchsten, für den Menschen unzugänglichen Wissenschaft, und die Unsicherheit unseres schwächlichen Erfassens läßt unsere Feststellungen hinter der reinen Wahrheit als bloße Vermutungen des Wahren zurückbleiben.“
> („De coniecturis“, *Über die Vermutungen*)

Abbildung 1:

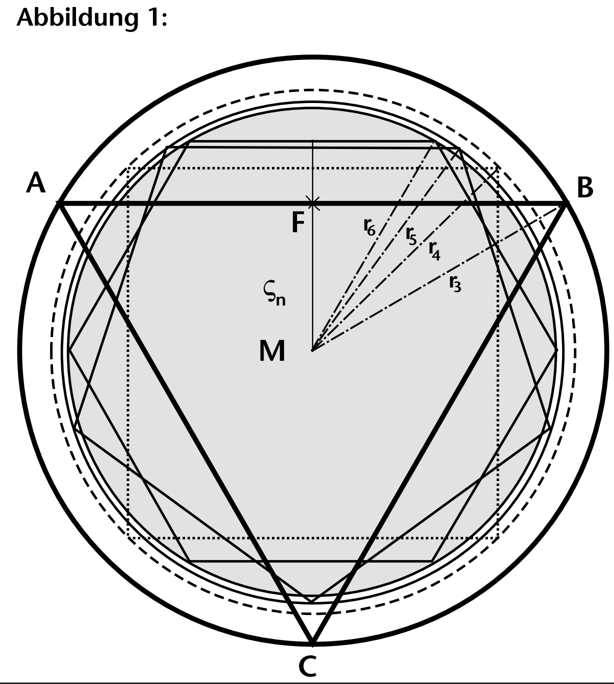
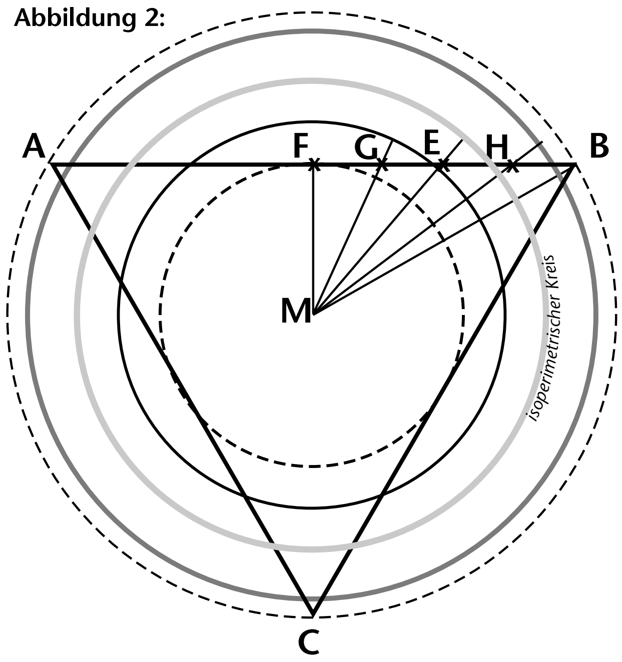


Abbildung 2:



Wie Nikolaus vermutete, führt der gesuchte Radius des isoperimetrischen Kreises durch den Punkt E. Das Verhältnis der Strecke EF zur Dreiecksseite AB ist dasselbe wie EB zu AB, nämlich 1/4. Wenn man die Strecke ME um 1/4 verlängert, wird sie zum isoperimetrischen Radius.

Nikolaus nahm nun an, daß der Schnittpunkt · des gesuchten Radius des isoperimetrischen Kreises mit der Dreiecksseite AB diese in den gleichen Proportionen unterteilen müsse wie den Radius selbst: Also müsse man die Strecke vom Mittelpunkt M bis · im gleichen Verhältnis verlängern wie der Abstand XF zur Dreieckseite AB, also in diesem Falle XF/AB, oder wie der Abstand XB zur Dreieckseite AB, also XB/AB. Alles kam nun darauf an, das richtige Verhältnis zu finden. In der letzten Folge war unser Radius entweder zu kurz oder zu lang geraten, und wir waren auf die Vermutung verfallen, daß unser gesuchter Punkt · genau in der Mitte zwischen den Punkten F und B liegen müsse. Für diesen Punkt E sind die Verhältnisse EF/AB sowie EB/AB beide die gleichen, nämlich jeweils ein Viertel (siehe *Abbildung 2*).

Dies wollen wir jetzt an einem Zahlenbeispiel überprüfen, und Sie werden sehen, daß wir sogar einen relativ genauen Wert für π erhalten werden. Erschrecken Sie dabei nicht über die viele Rechnerei. Sie ist keineswegs Selbstzweck, sondern Abbild für etwas anderes. So schreibt Nikolaus von Kues selbst über Sinn und Bedeutung der Geometrie und Mathematik:

> „Alles Sinnliche aber ist, auf Grund der in ihm überschießenden Möglichkeit der Materie, in fortwährender Unbeständigkeit. Wenn man aber abstraktere Gegenstände als jene betrachtet, nämlich solche, die zwar nicht völlig der materiellen Beimengung entbehren, ohne die sie nicht vorgestellt werden könnten, aber auch nicht nur einem vagen Möglichkeitsbereich zugrunde liegen, so sehen wir, daß es solche von höchster Beständigkeit und für uns von höchster Gewißheit gibt. Von dieser Art sind die mathematischen Gegenstände. Daher haben die Weisen Beispiele für Dinge, die nur mit der Vernunft zu erforschen sind, mit Recht aus dem mathematischen Bereich genommen; und keiner der Alten, sofern er für bedeutend gehalten wird, ist an schwierige Probleme anders als mit einem mathematischen Vergleich herangegangen...
> Hat nicht Pythagoras, der erste Philosoph dem Namen und der Sache nach, die gesamte Erforschung der Wahrheit auf die Mathematik gegründet? Die Platoniker und die ersten christlichen Philosophen sind ihm darin so weit gefolgt, daß Augustinus und nach ihm Boethius behaupteten, das ursprüngliche Urbild der zu schaffenden Dinge in Gottes Vernunft sei ohne Zweifel die Zahl gewesen...
> Auf diesem Wege der Alten schreiten wir, mit ihnen gehen wir zusammen, wenn wir sagen: Können wir uns dem Göttlichen auf keinem anderen Wege als durch Symbole nähern, so werden wir uns am passendsten der mathematischen Symbole bedienen, denn diese besitzen unzerstörbare Gewißheit.“
> („De docta ignorantia“, *Die belehrte Unwissenheit*)

Wenden wir uns aber wieder unserem Zahlenbeispiel zu, um unsere vergleichenden Überlegungen über die Verhältnisse der In- und Umkreise auf ihren Wahrheitsgehalt zu überprüfen:

Die Strecke FE beträgt genau ein Viertel der Dreiecksseite AB, d.h. FE = 1/4 AB. Wir wollen die gleichen Zahlenwerte unseres Beispiels aus der letzten Folge benutzen: Für den Inkreisradius MF des Dreiecks ABC hatten wir einen Wert von MF = 30 und für den Umkreisradius MB = 60 angenommen. Eine Dreieckseite war $AB = 2 \cdot \sqrt{2700}$ und die Strecke zwischen F und E ein Viertel dieses Betrages, also $FE = 1/2 \cdot \sqrt{2700}$. Um nun den Zahlenwert der Strecke ME zu erhalten, wenden wir den Satz des Pythagoras auf das rechtwinklige Dreieck FEM an und erhalten folgende Beziehung:

$$ME^2 = 30^2 + (1/2 \cdot \sqrt{2700})^2 = 900 + 2700/4$$

Daraus erhalten wir:

$$ME^2 = 900 + 675 = 1575$$

und wir brauchen nur noch die Wurzel ziehen, um den Betrag der Strecke vom Mittelpunkt M zur Dreiecksseite zu erhalten, d.h.

$$ME = \sqrt{1575}$$

Jetzt müssen wir ME aber noch um ein Viertel verlängern, um dann endlich die Länge des Radius r_{iso} des isoperimetrischen Kreises vor uns zu haben:

$$r_{iso} = ME + 1/4\ ME = 5/4\ ME,$$
in Zahlen:
$$r_{iso} = 5/4 \cdot \sqrt{1575}$$

Der Durchmesser d_{iso} des isoperimetrischen Kreises ist doppelt so lang wie r_{iso}:

$$d_{iso} = 2 \cdot 5/4 \cdot \sqrt{1575}$$

Jetzt wollen wir auch das Verhältnis π zwischen Umfang und Durchmesser des Kreises berechnen, wobei wir uns erinnern, daß wie bei allen Vielecken auch der zu ihnen isoperimetrische Kreis den folgenden Umfang besaß:

$$U = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2700}$$

Für das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser des isoperimetrischen Kreises ergibt sich demnach:

$$U/d = 6 \cdot \sqrt{2700} / 2 \cdot 5/4 \cdot \sqrt{1575} = 12/5 \cdot \sqrt{2700}/\sqrt{1575} = 3{,}1423376$$

Dies ist kein schlechtes Ergebnis für die Proportionale π! Wir hatten also mit Nikolaus von Kues ganz richtig vermutet, daß der Punkt E derjenige sei, welcher „am genauesten“ den Schnittpunkt des isoperimetrischen Kreisradius mit der Dreieckseite träfe.

Wie genau aber? Der Cusaner meint dazu:

> „Und so kann man nicht wissen, um wieviel er (d.h. dieser Punkt, C.H.) von der letzten Genauigkeit abweicht, da er mit einer gewöhnlichen Zahl nicht erreichbar ist. Und deshalb läßt sich dieser Fehler auch nicht beheben, da er nur durch eine höhere Einsicht und keineswegs durch einen sichtbaren Versuch faßbar ist. Daraus allein kannst Du nun wissen, daß erst in dem unserem Wissen unzugänglichen Bereich ein genauerer Wert erreicht wird. Ich habe nicht gefunden, daß diese Erkenntnis bisher überliefert wurde.“

Sie könnten zum Beispiel, wenn Sie noch genauere Werte für π erhalten wollen, die gleiche Prozedur bei einem Viereck, Fünfeck oder Seckseck durchführen, indem Sie jeweils die obere waagerechte Seite des Vielecks betrachten und die Werte für die Länge dieser Vielecksseite, die Strecke vom Mittelpunkt M zum vierten Teil der Seite und den Inkreisradius berechnen. Sie würden dann einen immer genaueren Wert für π erhalten!

Dennoch wir wollen uns mit dieser Erkenntnis nicht zufrieden geben, obwohl sie uns viele interessante Aufschlüsse geliefert hat. Der Cusaner hat nämlich noch eine andere geometrische „Verwandlung“ erdacht, die wiederum mit dem Vergleichen und Unterscheiden der In- und Umkreise zu tun hat. Wir werden also das nächste Mal versuchen, die Leiter zu einer noch „genaueren“ Wahrheit – die uns in das Gebiet der Musik führt, welche nur eine andere Form der Geometrie ist – zu erklimmen, wie es uns Nikolaus von Kues erklärt:

> „So ist in jeder Untersuchung des Wahren, wo wir vom einen zur Erkenntnis des anderen fortschreiten – vom Bekannten zum Unbekannten –, das nämliche zu bemerken, wie man nämlich das Wahre auf verschiedene und mannigfache Weise vor der letzten Genauigkeit erreichen kann, durch die eine Überlegung genauer als durch die andere, durch keine aber vollkommen genau, selbst wenn der Fehler nicht in Erscheinung tritt. Das Maß, mit dem der Mensch die Erforschung der Wahrheit anstrebt, hat zur Wahrheit selbst kein rationales Verhältnis, und daher nimmt derjenige, der sich diesseits der Genauigkeit beruhigt, den Irrtum nicht wahr. Und darin unterscheiden sich die Menschen: Die einen brüsten sich, zur vollen Genauigkeit vorgedrungen zu sein, deren Unerreichbarkeit die Weisen erkennen, so daß jene die weiseren sind, die um ihre Unwissenheit wissen.“
> („De circuli quadratura“, *Über die Kreisquadratur*)

Liebe Geometriefreunde,

leider ist uns in Folge 5 der laufenden Serie ein Fehler im Ausdruck einer Formel unterlaufen, wie manche von Ihnen bereits festgestellt haben dürften. Bei der Betrachtung der jeweiligen Dreiecke FBM in *Abbildung 1a-d* muß der Satz des Pythagoras richtig lauten:

$$\varsigma^2 = r^2 - (s/2)^2$$

oder

$$r^2 = (s/2)^2 + \varsigma^2$$

Wir bitten um Nachsicht.