Über die Leidenschaft der Erkenntnis und die Konstanten der Natur

Von Caroline Hartmann

E.I.R.

Über die Leidenschaft der Erkenntnis und die Konstanten der Natur

Von Caroline Hartmann

2001 wurde der 600. Geburtstag des Renaissancekardinals und Begründers der modernen Naturwissenschaften Nikolaus von Kues (1401-64) gefeiert. Aus diesem Anlaß verfaßte Caroline Hartmann seinerzeit den folgenden Aufsatz, in dem sie anhand von Cusanus' Schriften, insbesondere *De Circuli Quadratura* (Von der Quadratur des Kreises), *Geometricis transmutationibus* (Von den geometrischen Verwandlungen) und *De Coniecturis* (Über die Vermutungen), erläutert, wie Cusanus die Beschränkungen der Mathematik überwindet, um zu dem höheren Ideal zu gelangen, das der Naturkonstante π - dem Verhältnis zwischen den Durchmesser und dem Umfang des Kreises - zugrunde liegt. Der Aufsatz erschien ursprünglich als Serie in der Neuen Solidarität 8-16/2001, zum 625. Geburtstag des Cusaners haben wir den Text nochmals überarbeitet und neu gestaltet.

Titelbild: Ausschnitt aus „Die Schule von Athen", Wandgemälde von Raffaello Sanzio in der Stanza della Signatura des Vatikan (1510-1511).

Inhalt

Kapitel 1: Plancks Wirkungsquantum und die Fruchtspeicher der Ägypter	***3***
Kapitel 2: Archimedes und die unendlichen Vielecke	***7***
Kapitel 3: Die Bedeutung des Dreiecks	***11***
Exkurs: Das Monochord des Pythagoras	***14***
Kapitel 4: Isoperimetrische Vielecke	***15***
Kapitel 5: Inkreise und Umkreise	***19***
Kapitel 6: Der „genaueste" Weg zum isoperimetrischen Kreis	***22***
Lyndon LaRouche über Leibniz' Infinitesimalkalkulus	***25***
Kapitel 7: Die Kunst, zur Koinzidenz der Extreme zu gelangen	***27***
Kapitel 8: Die Musik - eine andere Art, Geometrie zu treiben	***31***
Letztes Kapitel: Die Konstruktion des isoperimetrischen Kreises	***35***

Impressum

E.I.R. GmbH, Bahnstraße 4, 65205 Wiesbaden, Tel. 0611-73650, Fax 0611-9740935, E-Mail info@eir.de

Geschäftsführer: Georg Neudecker, Josef Stalleicher, Verantwortlicher Redakteur: Alexander Hartmann

Kapitel 1: Plancks Wirkungsquantum und die Fruchtspeicher der Ägypter

Konstanten sind das, was Gottfried Wilhelm Leibniz einmal als „Charakteristika universalis" bezeichnet hat - universell gültige, proportionale Beziehungen zwischen verschiedenen Naturvorgängen. Was soll man sich darunter vorstellen? Es wäre hier die Gravitation zu nennen, die Elementarladung oder auch das immer gleiche Verhältnis zwischen dem Kreisumfang und seinem Durchmesser.

Vor gut hundert Jahren, am 14. Dezember 1900, stellte Max Planck der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft in Berlin eine ganz neue, von ihm entdeckte universelle Konstante vor: der in seiner Strahlungsformel wichtige Proportionalitätsfaktor h, genannt das „Plancksche Wirkungsquantum. Damit hatte es folgende Bewandtnis: Im Jahre 1859 hatten die Physiker Gustav Kirchhoff und Robert Bunsen bei Experimenten mit Farbenspektren verschiedener Körper ein verblüffendes Phänomen festgestellt. Es ergab sich bei allen Körpern, unabhängig von ihrer Größe oder Beschaffenheit, ein immer gleiches proportionales Verhältnis zwischen der Temperatur des strahlenden Körpers und der Wellenlänge seiner ausgesandten Strahlen. Wenn man z.B. einen Kupferdraht oder einen Platindraht erhitzt, dann werden beide Drähte Strahlen mit der gleichen Wellenlänge aussenden, obwohl sie aus völlig verschiedenem Material bestehen.

Es galt nun, diese Proportionalität als physikalisches Gesetz zu erklären. Planck fand das allgemeingültige Gesetz, doch hatte es eine Bedingung: Die Energieübertragung bzw. Absorption und Emission von Strahlung mußte in kleinen Portionen bzw. „gequantelt" vor sich gehen.

Diese Erklärung hat den Wissenschaftlern bis auf den heutigen Tag einiges Kopfzerbrechen bereitet. Und anstatt vor allem in die Experimente und direkte Untersuchung der Natur zu investieren, verbringt man seitdem die meiste Zeit mit Versuchen der „Deutung" theoretischer „Modelle" der Natur, ja man geht sogar soweit - wie zum Beispiel beim Urknallmythos oder der verrückten Klimahysterie - Ergebnisse aus echten praktischen Experimenten unter den Teppich zu kehren, um nur nicht diese Denkmodelle aufgeben zu müssen.

Max Planck 1938 (gemeinfrei)

Max Planck dagegen gehörte zu den Weisen in der Wissenschaft, welche die Wahrheit unter einem Haufen von „Scheinproblemen" herausfinden. Er war sich klar, daß es bei Vorgängen in der Natur, bei denen irgendwelche Konstanten auftreten, um die entscheidenden und immer gleich bleibenden „Charakteristika" des Universums handeln muß, „welche unabhängig von speziellen Körpern oder Substanzen, ihre Bedeutung für alle Zeiten und alle, auch außerirdische und außermenschliche Kulturen notwendig behalten." (M. Planck, *Ein Leben für die Wissenschaft*)

Hinsichtlich der großen Paradoxe, vor denen die Physik seit Plancks Entdeckung steht, hat er immer wieder betont, daß stets nach einer wahrhaftigen Lösung zu forschen sei. Noch in einem seiner letzten Vorträge am 17. Juni 1946 in Göttingen über die „Scheinprobleme der Wissenschaft" bemerkte er:

„Bei dieser Sachlage drängt sich aber eine grundsätzliche und folgenschwere Frage auf. Wenn wir in so zahlreichen Fällen die Wahrnehmung machen, daß große und wichtige Probleme bei der Nachprüfung sich als Scheinproblem entpuppen, ja daß das Wort ‚Wirklichkeit' manchmal einen ganz verschiedenen Sinn hat, je nachdem der Standpunkt der Betrachtung gewählt wird, kommt dann nicht unsere ganze wissenschaftliche Erkenntnis auf einen flachen Relativismus hinaus? Gibt es denn überhaupt kein absolut gültiges Urteil, keine absolute Wirklichkeit, unabhängig von irgendeinem Standpunkt? Es wäre schlimm, wenn dem so wäre. Nein, wohl gibt es in der Wissenschaft auch absolut richtige und endgültige Sätze, ebenso wie es in der Ethik absolute Werte gibt, und, was die Hauptsache ist, gerade diese Sätze und Worte sind die wichtigsten und erstrebenswertesten von allen. In der exakten Wissenschaft sind hier zu nennen die Größen der sogenannten absoluten Konstanten, wie das Elementarquantum der Elektrizität oder das elementare Wirkungsquantum und manche andere. Diese Konstanten ergeben sich immer als die nämlichen, nach welcher Methode man sie auch messen mag. Sie aufzufinden und alle physikalischen und chemischen Vorgänge auf sie zurückzuführen, kann man geradezu als das Endziel der wissenschaftlichen Forschung bezeichnen..."

Die Naturkonstanten sind nämlich nicht einfach Zahlen, die ein „glattes" Verhältnis zwischen zwei Größen darstellen, und auch nicht statistisch ermittelbar. Wenn man beginnt, die mit ihnen verbundenen Phänomene zu untersuchen, gerät man auf eine Entdeckungsreise in die Welt der Geheimnisse unseres Universums.

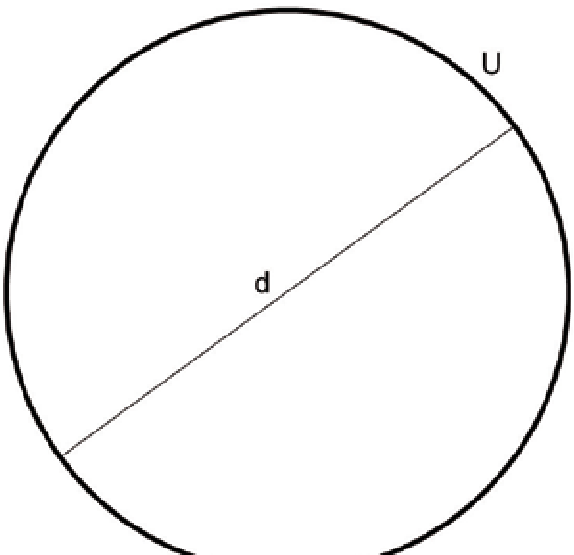
Wir wollen uns in dieser Geometrieserie ein wenig mit der Natur dieser Konstanten beschäftigen und als Beispiel diejenige Konstante betrachten, welche die proportionale Beziehung zwischen Umfang und Durchmesser jedes beliebigen Kreises darstellt - das sogenannte π.

Heute drückt man beim Taschenrechner einfach auf das Zeichen π und ein exakter Wert erscheint - wie man meint. Wir benutzen den Wert in unserer Rechnung und denken nicht im Entferntesten darüber nach. Doch dabei verpassen wir die spannendsten Geschichten und faszinierendsten Geheimnisse der Menschheit. Denn die Konstanten sagen natürlich nicht nur etwas über die Geometrie des Universums, sondern auch über unseren eigenen Geist und seinen unerschöpflichen Forscherdrang aus.

Nehmen Sie einen Pfennig und zeichnen Sie seinen Kreis auf ein Blatt Papier (*Abbildung 1*). Die Beziehung zwischen diesem Umfang und dem kleinen Pfennigdurchmesser ist genau die gleiche wie bei dem Kreis, dessen Durchmesser so groß ist wie die Entfernung zwischen der Erde und der Sonne. Können Sie sich vorstellen, warum das so ist?

Wir wollen uns im folgenden verschiedene Untersuchungen dieses Phänomens anschauen, zuerst der alten Ägypter vor ungefähr 6000 Jahren, dann des Archimedes (285-212 v.Chr.) und vor allem die von Nikolaus Cusanus (1401-1464). Sie werden einen „lebendigen" Prozeß wunderbarer geometrischer Phänomene entdecken, die alle in diesem - oberflächlich gesehen vielleicht etwas „formal" wirkenden - mathematischen Verhältnis zwischen Umfang U und Durchmesser d stecken. Und vor allem werden Sie feststellen, daß es bei den Konstanten oder universellen „Charakteristika" gar nicht darauf ankommt, einen immer exakteren Zahlenwert zu ermitteln, sondern, eher andersherum, daß der „Zahlenwert" eigentlich nur ein Nebeneffekt auf dem Weg zur Ergründung der Geometrie unseres Universums ist.

Abbildung 1:
Das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser ist bei jedem beliebigen Kreis gleich.



Das „Rechenbuch des Ahmes“

Das ägyptische Reich wurde von 30 aufeinanderfolgenden Dynastien beherrscht. Die erste, begründet durch Mena, datiert zurück etwa ins Jahr 4455 v.Chr.. Menas Sohn Teta wird in verschiedenen Schriften schon als Gelehrter und als Kundiger der Arzneikunst genannt. Auch finden wir schon früh großartige Beispiele der Baukunst.

Es existiert auch ein „Rechenbuch“ des Ahmes, das einzige der vollständigen alten Schriften, die bisher der Öffentlichkeit übergeben wurden - viele unveröffentlichte Schriften befinden sich übrigens im Besitz des Britischen Museums in London - und dort lauten die Anfangsworte:

„Vorschrift zu erlangen zur Kenntnis aller dunklen Dinge... aller Geheimnisse, welche enthalten sind in den Gegenständen...“

Der bedeutende Mathematikhistoriker Moritz Cantor hat in seinen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* Ahmes als den wichtigsten bekannten Vertreter der altägyptischen Mathematik dargestellt. Er untersuchte das von Ahmes kopierte Papyrus Rhind intensiv und betonte, daß Ahmes ein Geometrie-Werk von ca. 2000 v. Chr. abgeschrieben hat, wodurch dieses Wissen für die Nachwelt bewahrt wurde.

Dieser Ahmes überliefert uns zum ersten Mal Zahlenrechnungen auch mit Brüchen, zum Beispiel zur Berechnung von Feldern, runden Fruchthäusern und anderen Nahrungsmittelspeichern. Es tauchen auch schon geometrische Figuren wie das Dreieck, Rechteck und Paralleltrapez auf, die alle durch Benutzung des Lineals, aber ohne Zirkel konstruiert werden sollten. Bei der Berechnung des Rauminhalts „runder“ Fruchtspeicher tauchte wohl auch zum ersten Mal das Paradox auf, wie man Krummes berechnen solle. Man erkannte das Paradox der ewig gleichen Beziehung U:d in einem beliebigen Kreis.

Das Verhältnis U:d bedeutet ja Krummes im Vergleich zu Geradem. Ist das durch einen Zahlenwert ausdrückbar, oder ist hier mehr verborgen?

Man ging auch tatsächlich daran, den Kreis auszumessen, was heute als die erste bekannte „Quadratur des Kreises“ bezeichnet wird. Ahmes gibt sogar wirklich an, wie man ein Quadrat finden könne, das die gleiche Fläche wie der vorgegebene Kreis habe: Nehmen wir an, der vorgegebene Kreis hat den Durchmesser d, dann soll nach Ahmes die Seite a des Quadrats genau der Betrag des um 1/9 seiner Länge gekürzten Kreisdurchmessers sein: a = d - 1/9 d (*Abbildung 2*)

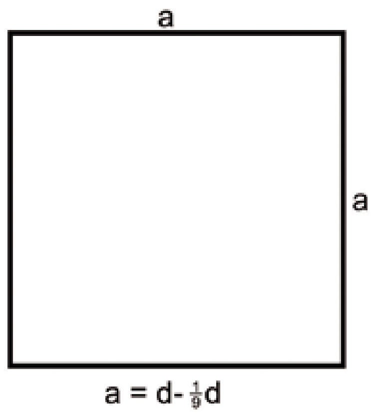
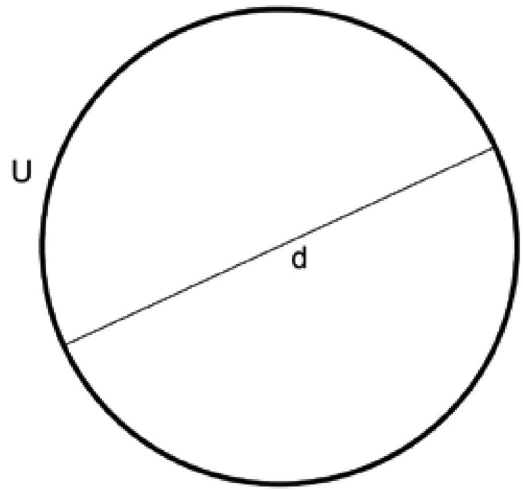


Abbildung 2: *Bestimmung der Konstante U/d durch den Ägypter Ahmes, ca. 4500 v. Chr.*



Daraus ergibt sich die folgende weitere Überlegung. Da die Fläche des Quadrates $F_{Quadrat} = a \bullet a$ gleich der Fläche des Kreises $F_{Kreis} = \pi \bullet (d/2)^2$ sein soll, so setzt man diese gleich und löst sie nach π auf:

$F_{Quadrat} = F_{Kreis}$
also:
(1) $a \bullet a = \pi \bullet (d/2)^2$
Wenn wir dann für a den Wert von Ahmes in (1) einsetzen, heißt das:

$(d - 1/9\, d)^2 = \pi \bullet (d/2)^2$
also:
(2) $(8/9) \bullet d^2 = \pi \bullet (d/2)^2$

Und wenn man die Gleichung nach π auflöst, erhält man:

$$\pi = 4 \bullet (8/9)^2$$
$$= (16/9)^2$$

Nikolaus von Kues (1401 - 1464) auf seinem von Andrea Bregno geschaffenen Grabmal in der Kirche San Pietro in Vincoli, Rom

Daraus ergab sich ein Wert für π von π = 3,1604...

Offenbar muß die Möglichkeit der Flächenberechnung des Kreises durch die Beziehung $F_{Kreis} = \pi \bullet (d/2)^2$ bekannt gewesen sein. Es gibt hier leider keine näheren bekannten Überlieferungen. Moritz Cantor bemerkte dazu in seinen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*:

„Wie man zu dieser Vorschrift gekommen sein mag, ist nicht entfernt zu erraten. Gesichert ist sie durch wiederholtes Auftreten, gesichert ist auch ihre ziemlich gute Anwendbarkeit, denn sie entspricht einem Werte $\pi = (16/9)^2 = 3{,}1604$ ... für die Verhältniszahl der Kreisperipherie zum Durchmesser, der weitaus nicht der schlechteste ist, dessen Mathematiker sich bedient haben.“ (M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 4 Bde., 1907)

Tiefergehende Forschungen zu diesem Thema sind wahrscheinlich damals nicht vorgenommen worden, und wie schon vorher bemerkt, würde dieses Ergebnis so manchen unserer Zeitgenossen vollauf zufriedenstellen. Aber sind wir durch diese Berechnung nun der wahren Ursache für die konstante Beziehung U:d näher gekommen? Sie müssen zugeben: eigentlich nicht! Und auch Nikolaus von Kues, der sich 6000 Jahre später dem Problem annahm, schrieb 1445 an seinen Freund Paolo dal Pozzo Toscanelli:

„Wohl haben die Alten, mit starkem Forschergeist begabt, in unermüdlichem Fleiß versucht, viel damals Verborgenes für sich und die Nachwelt ans Licht zu bringen; wohl haben sie in den meisten hohen und schönen Künsten mit Erfolg gearbeitet, aber in einigen der höheren Wissenszweige haben sie nicht alles Erstrebte erreicht... Unter den Aufgaben, die bisher den geometrischen Spekulationen hindernd im Wege standen, blieb vornehmlich eine auch von allen denen ungelöst..., nämlich: Zwischen einer geraden und einer gekrümmten Linie Gleichheit herzustellen oder eine Verwandlung ineinander zu leisten. So kam es, daß es vielen, ja fast allen, die sich dieser Untersuchung widmeten, nach unermeßlichen Mühen schien, der Weg zur Einsicht in diesen Sachverhalt sei uns entrückt, und zwar wegen der Unmöglichkeit des Unterfangens, da die Natur der Koinzidenz einer solchen Gegensätzlichkeit widerstrebe. Ich aber glaube, die Schwierigkeit dieses Unternehmens liegt vielmehr in einem zu geringen Verständnis, in mangelnder Sorgfalt und im Fehlen der äußersten Aufmerksamkeit, wie sie eine völlig ungelöste Aufgabe erfordert.“

(N. v. Kues, *Über die geometrischen Verwandlungen*)

Man kann mit Recht behaupten, daß Nikolaus Cusanus, der in diesem Jahr (2026) seinen 625. Geburtstag feiern würde, mit seinen Untersuchungen über den Kreis das menschliche Denken vollständig revolutionierte. Er eröffnete dem Menschen den Weg, die „Unendlichkeit“ zu ergreifen. Durch seine geometrischen „Verwandlungen“ - wie er seine geometrischen Untersuchungen manchmal nennt - schuf er die denkerische Grundlage für die großen naturwissenschaftlichen, mathematischen und auch musikalischen Errungenschaften der Neuzeit. Er betrat mit seinen Untersuchungen eine neue Ebene des Denkens, die es in der Weiterentwicklung in Leibniz` Infinitesimalrechnung ermöglicht, einen unendlichen Näherungsprozeß als realen mathematischen Wert zu erkennen und mit ihm sogar zu rechnen.

Kapitel 2: Archimedes und die unendlichen Vielecke

Die Betrachtung konstanter Verhältnisse in der Natur zeigt uns, daß es nicht nur darauf ankommt, dabei den „endgültigen“, absolut genauen Zahlenwert auszurechnen, d.h. es ist eher nebensächlich, ob ich für π den Wert 3,141592653589793 nimmt oder 3,14159265358. Man wird ihn ohnehin nie erreichen, da es sich dabei immer um sogenannte „irrationale“ Zahlen handelt, also solche mit unendlich vielen Stellen nach dem Komma. Und auf diesem Wege werden wir niemals zu einem echten Verständnis dieses „universellen Charakteristikums“ gelangen. Ganz im Gegenteil sollte man bemerken, daß hier ein Geheimnis der Gesetzmäßigkeiten unseres Universums verborgen ist, dem wir uns nicht allein durch eine Zahl nähern können. Daran ist wirklich nichts Irrationales.

Bei der Benennung dieser Zahlen als „irrational“ müssen also nicht besonders einsichtige Leute am Werke gewesen sein. Diese Namensgebung läßt eher darauf schließen, daß die Bedeutung solcher Konstanten von den meisten Mathematikern gründlich mißverstanden wurde.

Wir hatten gesehen, daß sich die Ägypter schon vor 6000 Jahren mit der Berechnung runder Rauminhalte beschäftigten und mit dem Phänomen vertraut waren, daß Umfang und Durchmesser eines Kreises immer im gleichen Verhältnis zueinander stehen, unabhängig von Größe oder Beschaffenheit des Kreises. Doch die Lösung erinnerte ein wenig an jemanden, der sich mit dem Wert aus dem Taschenrechner begnügt, ohne weitere Nachforschungen anzustellen. Man konnte damit „rechnen“, ohne den tieferen Sinn der Angelegenheit zu begreifen.

Nikolaus Cusanus bemerkte, daß die alten Forscher diesen Punkt nicht genügend erforscht hatten, und revolutionierte mit seinen Überlegungen das gesamte menschliche Denken. Er hatte verstanden, daß es im Kern darum ging, „zwischen einer geraden und einer gekrümmten Linie Gleichheit herzustellen oder eine Verwandlung ineinander zu leisten“. Dies widerstrebe aber grundsätzlich dem menschlichen Denken, da es sich hier um eine „Koinzidenz der Extreme“ handele. Er schrieb:

„So kam es, daß es vielen, ja fast allen, die sich dieser Untersuchung widmeten, nach unermeßlichen Mühen schien, der Weg zur Einsicht in diesem Sachverhalt sei uns entrückt, und zwar wegen der Unmöglichkeit des Unterfangens, da die Natur der Koinzidenz einer solchen Gegensätzlichkeit widerstrebe. Ich aber glaube, die Schwierigkeit dieses Unternehmens liegt vielmehr in einem zu geringen Verständnis, in mangelnder Sorgfalt und dem Fehlen der äußersten Aufmerksamkeit, wie sie eine völlig ungelöste Aufgabe erfordert“ („Geometricis transmutationibus“, übers. *Von den geometrischen Verwandlungen*).

Nun hatte bereits der große Archimedes von Syrakus (287 v. Chr. bis 212 v. Chr.) nach der Untersuchung der Ägypter (2000 v. Chr.) viel mehr Mühe an diese Aufgabe gewandt. Doch auch seine Lösung überzeugte den Cusaner nicht, obwohl uns Archimedes das Paradoxon zwischen der „Vielheit“ der Ecken und Seiten an den Kreis angenäherter Vielecke und der „Einheit“ des Kreises als Inbegriff der „Gekrümmtheit in jedem noch so kleinen Punkt“ erst in seiner ganzen Kraßheit vor Augen geführt hat.

Archimedes begann eine sehr mühsame Untersuchung: Zuerst konstruierte er außen um einen

Darstellung der Kreiszahl π
(Wikimedia Commons/Petrus3742, cc-by-sa 4.0)

Archimedes, Gemälde von Domenico Fetti, 1620. Gemäldegalerie Alte Meister, Dresden (gemeinfrei, wikipedia)

Kreis ein Sechseck, dann halbierte er dessen Seiten, ein neues Vieleck erzeugend, und so fort. So entstanden immer mehr Vielecke um den Kreis herum, die immer mehr und immer kürzere Seiten hatten und dem Kreis immer näher rückten (siehe *Abbildung 3*).

Schauen wir uns seine Anfangskonstruktion an, den Kreis mit einem umschriebenen Sechseck. Hier wiederum betrachten wir eines der kleinen Dreiecke ABC und teilen die Seite durch den Punkt T, so daß wir ein rechtwinkliges Dreieck ATB vor uns haben (siehe *Abbildung 4*).

Wir können demnach bei diesem Dreieck mit dem Satz des Pythagoras arbeiten, der hier besagt $AB^2 = AT^2 + BT^2$. Archimedes gibt nun geschickt Zahlenwerte an - die er ganz sicher vorher für sich selber in mühsamer Rechenarbeit erarbeitet hat -, welche immer um einen kleinen Betrag größer sind als das Verhältnis der halben Seite BT zum Radius des Kreises, dann solche, die um einen geringen Betrag größer sind als das Verhältnis der Viertelseite GT zum Kreisradius r, dann solche, die ganz wenig kleiner sind

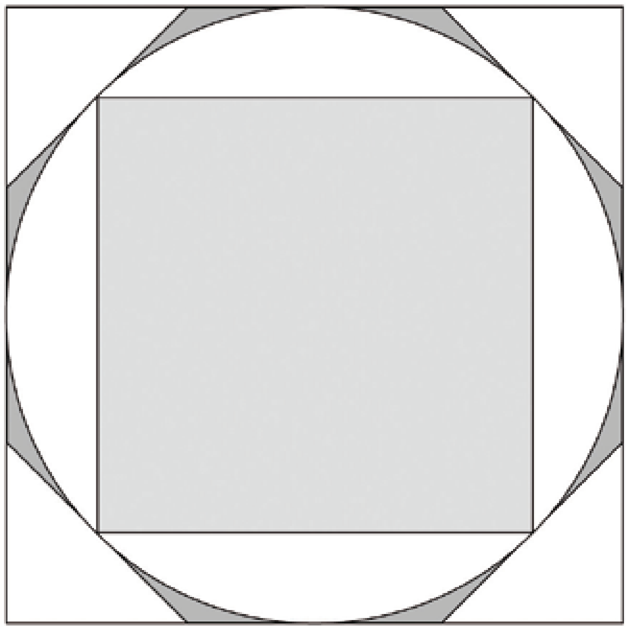


***Abbildung 3**: Archimedes' Konstruktion von Vielecken, die sich dem (vorgegebenen) Kreis immer mehr annähern.*

als die Achtelseite ET zum Kreisradius r und immer so weiter, bis er schließlich bis zum 96-Eck gelangt! Archimedes erhält schließlich folgende Beziehungen:

r : BT > 265 : 153

r : GT > 571 1/4 : 153 und

r : ET > 1162 1/8 : 153.

Der Umfang des Sechsecks ist dabei, wenn man die Zeichnung betrachtet, U_6 = 12 x BT, der Umfang des Zwölfecks U_{12} = 24 x GT und der Umfang des Vierundzwanzigecks beträgt U_{24} = 48 x ET.

Wir wollen hier nicht Archimedes' gesamte Prozedur von Winkelhalbierungen, Vergleich von Verhältnissen und Einsetzen von ungefähr richtigen, aber immer etwas zu großen oder zu kleinen Größen vorführen (wer darüber mehr lesen will, kann sich in Moritz Cantors Werk *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* schlau machen).

Um aber einen Eindruck von Archimedes mühseligen Rechenarbeit zu geben, sei hier nur das Resultat seiner Rechnungen gezeigt: Er erhielt für das Verhältnis r : U_{96} > 4673 1/2 : 29376, oder andersherum ausgedrückt, wenn man r als den Radius und den Durchmesser d = 2r des

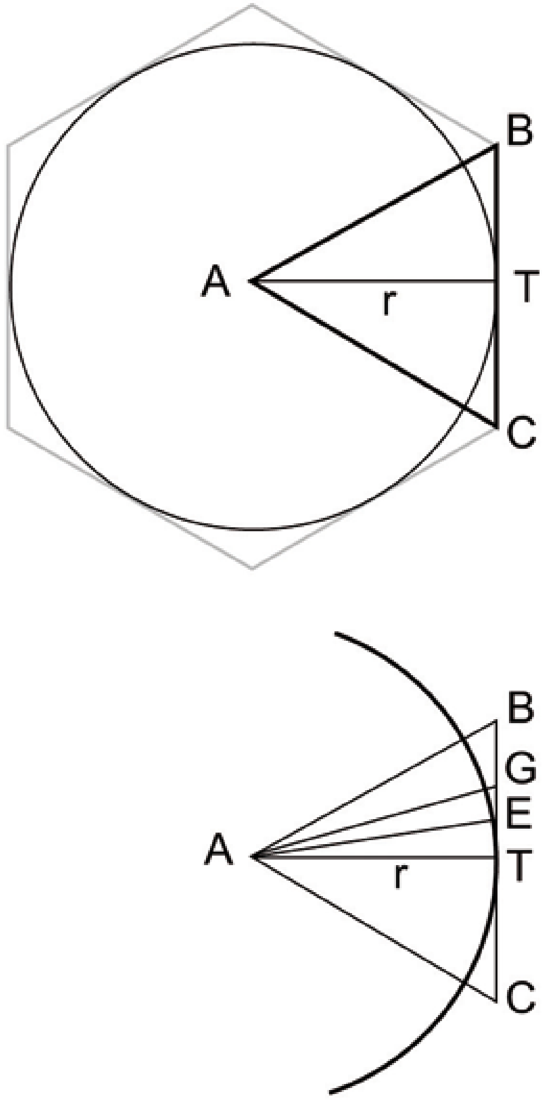


Abbildung 4: *Durch immer weitere Seitenhalbierungen der Dreieckseite BC (im Sechseck, das den Kreis umschließt) versuchte Archimedes sich dem Kreisumfang rechnerisch anzunähern.*

Kreises betrachtet, dann gilt für den Umfang des 96-Ecks: U_{96} : d < 14688 : 4673 1/2, und dieses Verhältnis ist wiederum kleiner als 3 10/70 : 1.

Dadurch hat nun Archimedes die obere Grenze seines Werts festgelegt und beginnt dann das gesamte Vorgehen noch einmal für die eingeschriebenen Vielecke, wodurch er letztendlich auf die Beziehung 3 10/71 < U : d < 3 10/70 kommt. Dabei ist zwar der Wert des Verhältnisses U:d „eingekreist", doch so richtig errechnet sind die Rahmenwerte tatsächlich nur für das 96-Eck.

Bei Betrachtung dieser Untersuchung des Archimedes staunen wir zwar über die große Genauigkeit, die er mit seiner Idee der Kreisannäherung erreichte, doch die Frage, ob wir jetzt

Paolo dal Pozzo Toscanelli (1397-1482), italienischer Arzt, Mathematiker, Astronom, Kartograf und Freund des Nikolaus von Kues, gehörte zu den führenden Wissenschaftlern seiner Zeit.

mehr über das „Warum?" der immer gleichen Proportionalität zwischen Umfang und Kreisdurchmesser herausgefunden haben, müssen wir wieder verneinen. Ja, durch Archimedes' Untersuchung wird sogar erst recht deutlich, wie extrem unterschiedlich gerade und krumme Linien sind. Scheinbar eine unendliche Geschichte und ein krasser Gegensatz. Ein wirkliches Paradox.

Nikolaus Cusanus schrieb darüber an seinen Freund Paulus (Paolo dal Pozzo Toscanelli):

„Es gab sorgsame und genaue Gelehrte, allen voran Archimedes, die gezeigt haben, daß der Kreisumfang im Verhältnis zum Durchmesser größer ist als 3 10/71 und kleiner als 3 10/70, und daß dieser Näherungswert fortwährend genauer gemacht werden kann. Sie haben uns aber nicht überliefert, wo der zahlenmäßig nicht erreichbare genaue Wert verborgen ist..." (*Von den geometrischen Verwandlungen*).

Wir haben es mit zwei absoluten Gegensätzen zu tun: auf der einen Seite den Kreis als Inbegriff

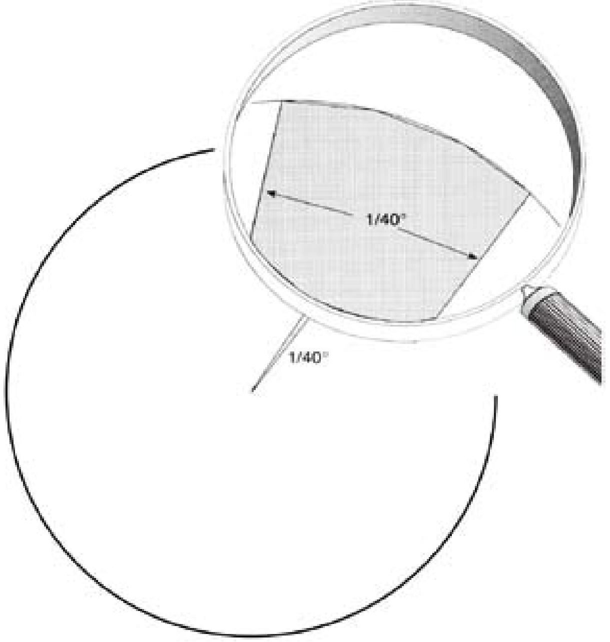


Abbildung 5: *Ein einbeschriebenes Vieleck mit 216 Seiten sieht scheinbar wie ein Kreis aus – ist aber kein Kreis.*

des „Krummen“, der in jedem noch so kleinen Punkt eine Krümmung hat, und auf der anderen Seite lauter gerade Seiten - mit jedem Vieleck mehr. Dies bietet noch eine zusätzliche Absurdität, denn auch wenn wir es schafften, z.B. mit einem Vieleck von 65536 Seiten ganz nah an den Kreisumfang heranzukommen und ein Abstand nur noch mit der Lupe feststellbar wäre, sind wir doch umso weiter vom Kreis entfernt, der ja nicht eine einzige Ecke besitzt (siehe *Abbildung 5, S. 10*).

Wir stehen hier nicht nur vor einem geometrischen Paradoxon, sondern auch vor einer scheinbar unüberwindlichen Aufgabe für unseren Geist, wie es Nikolaus von Kues ausdrückt,

„...denn da Vieleckfiguren nicht Größen der nämlichen Art sind wie die Kreisfigur, gilt, selbst wenn sich ein Vieleck finden ließe, das einem gegebenen Kreis der Größe nach näher kommt als ein anderes, trotzdem der Satz: *Bei Dingen, die ein Größer und Kleiner zulassen, gelangt man nicht zu einem schlechthin Größten im Sein und in der Möglichkeit (in esse et posse).*

„Die Kreisfläche ist nämlich im Vergleich zu den Vieleckflächen, die ein Größer und Kleiner zulassen und die Kreisfläche daher nicht erreichen, das schlechthin Größte, so wie die Zahlen nicht die Fassungskraft der Einheit erreichen und die Vielfachheiten nicht die Kraft des Einfachen.“ („De circuli quadratura“, *Von der Quadratur des Kreises*).

Die Einheit (des Kreises) ist unwandelbar und ewig, dagegen ist die „Vielheit“ aller Dinge einer ständigen Änderung, einem Größer- und Kleinerwerden unterworfen. Der Cusaner erklärt auch, warum uns die Aufgabe, diese Gegensätze zu vereinen, so unlösbar erscheint:

„Dies überschreitet aber alle unsere Vernunft, die in ihrem Ursprung die Widersprüche nicht auf dem Wege des Denkens vereinigen kann, da wir nur durch das, was uns von Natur einsichtig ist, voranschreiten. Unsere Vernunft aber bleibt weit hinter diesem unendlichen Vermögen zurück und kann daher die unendlich weit voneinander abstehenden Glieder des Widerspruchs nicht verbinden...“ (*Von der Quadratur des Kreises*)

Will er aber nur sagen: „Lieber Archimedes bzw. liebe Nachwelt, hier seht Ihr, daß es so nicht geht?“ Nein, genau das Gegenteil. Er hat eine faszinierende Idee, um den Weg aufzuzeigen, auf dem es dem menschlichen Geist schließlich doch gelingen wird, diese Aufgabe auf einer höheren Ebene der menschlichen Erkenntnis zu lösen. Er führt uns Schritt für Schritt zum Erkennen einer echten Koinzidenz der Extreme einem Zusammenfall von Gegensätzen, die uns erst als Paradox erschienen, aber deren Lösung wir auf einer höheren Ebene begreifen können. Doch nicht durch „Annäherung“ an irgendeinen Zahlenwert, sondern durch einen lebendigen Prozeß, bei der er sich die beständige Arbeit des menschlichen Geistes zunutze macht und die Geometrie und Mathematik als Werkzeug dazu gebraucht:

„Der beste Erhalter aller Dinge hat es nämlich so bestimmt, damit die göttliche Kraft des Erkennens in uns nicht erlahme, sondern durch immer lebhafteres Interesse auf das noch Verborgene, aber der Erkenntnis Zugängliche gelenkt werde. Wir geben uns leidenschaftlich der Erforschung des Dunkels hin, damit wir uns um so ruhiger der Stärke unseres Geistes erfreuen“ (*Von den geometrischen Verwandlungen*).

Kapitel 3: Die Bedeutung des Dreiecks

Als erstes müssen wir begreifen: die „Rahmenbedingungen“ der Geometrie unseres Universums, die „Konstanten“ wie π, oder die Avogadro-Konstante, die Teilchenzahl pro Mol N_A, die Gravitationskonstante g, das Planck`sche Wirkungsquantum h, die Elementarladung e eines Elektrons usw. sind nicht nur „Zahlenwerte“. Mit Nikolaus Cusanus hatten wir festgestellt: weder durch eine rechnerische Prozedur wie bei den Ägyptern noch durch die immer größere Annäherung an den Kreisumfang durch Konstruktion in- und umgeschriebener Vielecke mit immer mehr Ecken, wie Archimedes es vorschlug, erreichen wir jemals eine Antwort auf das „Warum?“ oder den Sinn hinter der Naturkonstante π. Alle Naturkonstanten sind vielmehr ein Hinweis des Universums an den Menschen, mehr über seine Gesetzmäßigkeiten herausfinden zu können, mehr Fähigkeiten und Erkenntnisse für die Menschheit zu erlangen.

Wie man weiß, reicht es heute den meisten, auf dem Taschenrechner die Taste für π zu drücken und nicht groß zu fragen. Aber Fragen stellen ist doch viel interessanter, oder? Dadurch eröffnen sich sonst unbeachtete Zusammenhänge, die oft an anderen Punkten unseres Lebens als unüberwindliche Paradoxa wieder auftauchen.

Nikolaus von Kues hatte erkannt, daß wir solche Widersprüche, wie das Krumme mit dem Geraden zu vergleichen „nicht auf dem Wege des formalen Denkens“ lösen können, „da wir nur durch das, was uns von Natur einsichtig ist, voranschreiten...“

Aber wenn nicht auf dem Wege des formalen Denkens, wie denn sonst? Wie findet man die höhere Ebene der Koinzidenz? Der Cusaner hatte eine andere Idee, man könnte es fast als ein geometrisches Spiel betrachten: Er beginnt seine Untersuchungen nämlich nicht mit irgendeinem Kreis, sondern betrachtet den *Prozeß*, der - ausgehend vom inneliegenden und umschreibenden Kreis eines Dreiecks ABC zum Auffinden des zum Dreieck isoperimetrischen (d.h. Zum Dreieck umfangsgleichen) Kreises führt. (siehe *Abbildung 6*).

Irgendwo in dem großen freien Zwischenraum zwischen Inkreis und Umkreis des Dreiecks muß der isoperimetrische Kreis liegen. Aber wo, und warum überhaupt dort? Dies wollen wir im folgenden untersuchen. Doch hören wir zuerst Nikolaus' Idee:

„Nach fast zahllosen Ansätzen, mit denen ich mich mühte (allerdings immer vergeblich), zu der vorgesetzten Kunst zu gelangen, hat sich mir durch den Rückgriff auf das in meiner Schrift über die wissende Unwissenheit angewendete Prinzip endlich ein Weg aufgetan. Die Kunst, die ich suche, leistet außer dem in der Geometrie schon Überlieferten die Verwandlung des Gekrümmten in das Gerade und des Geraden in das Gekrümmte. Da zwischen diesen Größen kein rationales Verhältnis bestehen kann, muß sich das Geheimnis hier in einer Koinzidenz der Extreme verbergen. Da diese Koinzidenz im Maximum statthat (wie anderweitig dargetan wird) und das Maximum der unbekannte Kreis ist, wird hier gezeigt, daß sie im Minimum - das ist das Dreieck - aufgesucht werden muß.“

(*De geometricis transmutationibus*, „Von den geometrischen Verwandlungen“)

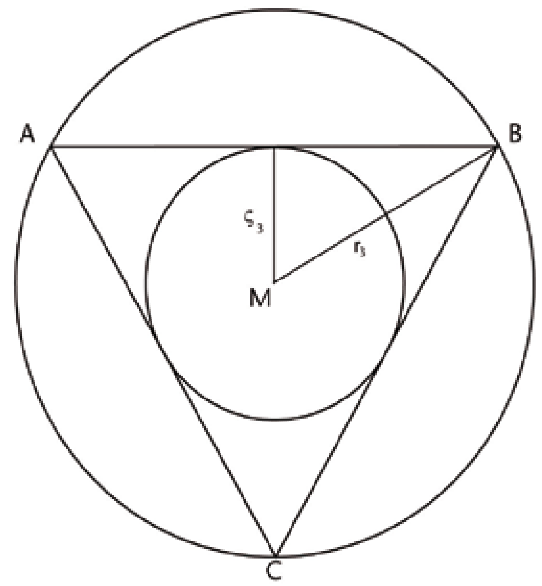


Abbildung 6: *Nikolaus betrachtete als erstes das Dreieck mit seinem In- und Umkreis. Dann begann er die Suche nach dem zum Dreieck isoperimetrischen Kreis.*
ς = Radius des Inkreises,
r = Radius des Umkreises

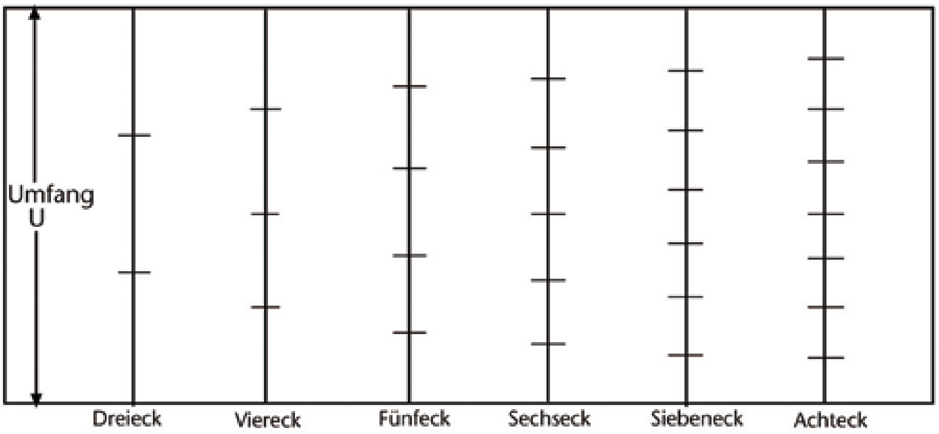


Abbildung 7: *Bei isoperimetrischen Vielecken ist der Umfang immer gleich. Er muß also bei größer werdender Eckenzahl auf immer mehr – gleichlange – Seiten aufgeteilt werden.*

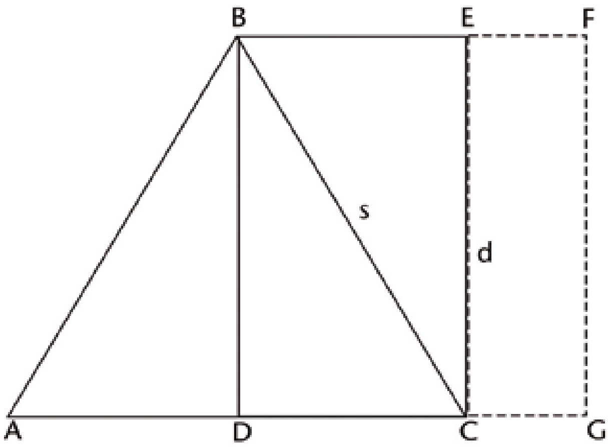


Abbildung 8: *Das Rechteck BFGD mit dem gleichen Umfang wie das Dreieck ABC hat eine größere Fläche als dieses.*

Betrachten wir nun das Dreieck ABC. Ein Dreieck ist offensichtlich das kleinste aller Vielecke. Wie man in Abbildung 6 sehen kann, liegen auf dem *Umkreis* des Dreiecks die drei Ecken des Dreiecks A, B, und C, auf seinem *Inkreis* die Mittelpunkte der Dreieckseiten, also die Mittelpunkte von AB, BC und CA. Der Radius des Inkreises ς_3 ist also die Strecke vom Mittelpunkt M des Kreises zur Seitenmitte des Dreiecks, der Radius des Umkreises r_3 dagegen die Strecke vom Mittelpunkt M zu einer der Ecken A, B oder C.

Nun geht es darum, den zu diesem Dreieck isoperimetrischen, d.h. umfangsgleichen Kreis zu finden. Wie groß wird er wohl sein? Wissen wir eigentlich mit Sicherheit, daß er zwischen In- und Umkreis des Dreiecks zu finden sein wird?

Nikolaus konstruiert nun eine Reihe von Vielecken, die alle den gleichen Umfang haben sollen. Dieser Umfang muß sich nun beim Viereck, Fünfeck, Sechseck usw. auf immer mehr Seiten „verteilen". Wir können uns dies bildlich vorstellen, wenn wir uns zwei parallele waagerechte Linien zeichnen, deren Abstand dem Umfang entsprechen soll. Dann zeichnen wir einige senkrechte Verbindungslinien ein, auf denen wir die jeweilige Aufteilung des Umfangs in die Zahl der Vieleckseiten markieren (*Abbildung 7*).

Der Umfang wird in immer mehr und immer kürzere Seiten der Vielecke aufgeteilt, was bedeutet, daß die Vieleckseiten immer kleiner werden müssen. Aber was bedeutet das für die Fläche der Vielecke? Wird deren Fläche größer oder kleiner?

Der englische Gelehrte Thomas Bradwardine (um 1290 - 1349), von dem Nikolaus Cusanus viele geometrische Überlieferungen der Alten gelernt hat und den er ausgiebig studierte, zeigte, daß geometrische Vielecke, die den gleichen Umfang besitzen, mit zunehmender Seiten- bzw. Eckenzahl an Fläche zunehmen. Betrachten wir ein gleichseitiges Dreieck ABC und das dazu flächengleiche Rechteck BDCE (*Abbildung 8*).

Die Flächengleichheit ist leicht erkennbar, da das Rechteck aus zwei ebensolchen rechtwinkligen Dreiecken zusammengesetzt ist wie das Dreieck. Der Umfang dieses Rechtecks ist offenbar kleiner als der des Dreiecks, denn wenn man die Länge der einzelnen Seiten addiert, so kommen wir beim Dreieck auf $U_3 = s + s + s = 3s$, wobei U_3 den Umfang und s die Seiten des Dreiecks bezeichnen soll.

Wenn wir die Seiten des Rechtecks betrachten, so sehen wir erstens, daß die beiden kleineren Seiten jeweils genau die Hälfte der Dreieckseite ausmachen, also jeweils s/2, daher zusammen nur so groß sind wie eine Dreieckseite, die anderen beiden Seiten aber jeweils kleiner als die Dreieckseiten sind.

Das erkennt man wie folgt: Die Diagonale des Rechtecks ist so lang wie die Dreieckseite, die Rechteckseite aber beträgt, wenn man den Satz des Pythagoras auf das Dreieck BEC anwendet und s die Diagonale, d die Rechteckseite bezeichnen soll:

$s^2 = (s/2)^2 + d^2$, d.h.

$s^2 - s^2/4 = d^2$, also

$3/4\ s^2 = d^2$ oder

$\sqrt{(3/4)}\ s = d$

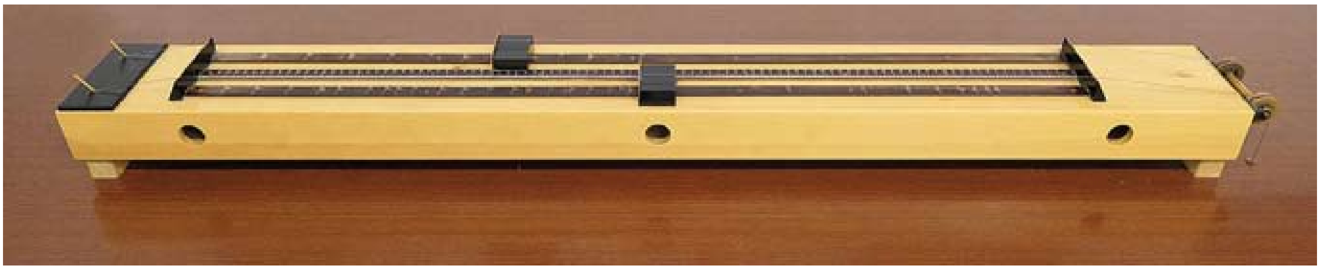
Wir erhalten als Summe der Seiten für das Rechteck, wobei U_4 hier den Umfang des Rechtecks bezeichnen soll:

$$U_4 = 2 \bullet 1/2\ s + 2 \bullet \sqrt{(3/4)}\ s$$
$$= s + \sqrt{3}\ s$$

Wir erkennen, daß $s + \sqrt{3}\ s$ daher bestimmt kleiner ist als 3 s, daß also der Umfang des Rechtecks kleiner ist als der des Dreiecks. Wenn wir jetzt also die Rechteckseiten so verlängern, daß der Umfang dem des Dreiecks gleich wird, dann bekommt es offensichtlich eine größere Fläche, nämlich die vorige und zusätzlich das schmale Stück ECGF.

Dies ist einleuchtend, doch Bradwardine hat den Beweis nicht für alle Vielecke verallgemeinert und nur angedeutet, daß dies sehr leicht möglich sei. Wir müssen uns also noch ein paar weitere Gedanken zur Größe der Flächen machen, um vollends über den Prozeß, der uns letztendlich zum isoperimetrischen Kreis führen soll, Klarheit zu erhalten.

Thomas Bradwardine (um 1295-1349) sammelte zahlreiche geometrische Überlieferungen der Antike.

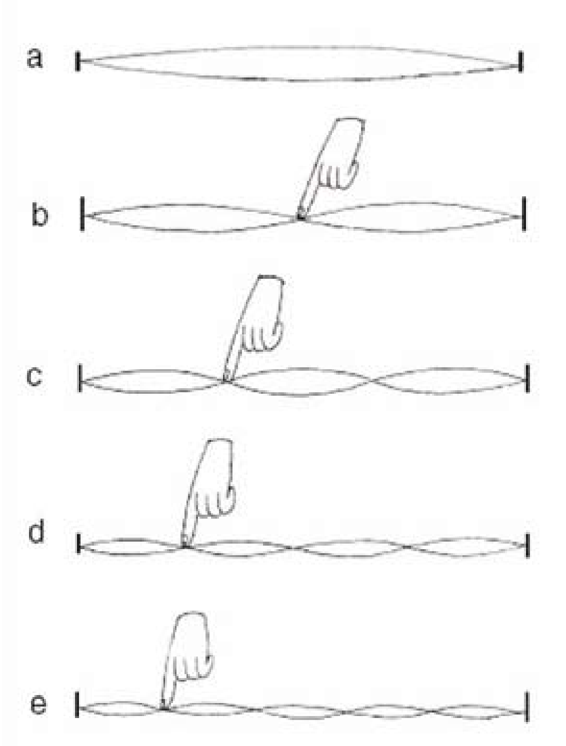


Auf der Aufteilung gegebener Strecken in gleichlange Stücke beruht auch das von dem groechischen Wissenschaftler Pythagoras entwickelte Monochord. Hier abgebildet ist ein Monochord mit zwei Saiten aus der Physikabteilung des Deutschen Museums in München. (Wikimedia Commons/Bautsch, CC0)

Exkurs: Das Monochord des Pythagoras

Betrachten wir folgendes Experiment, welches Pythagoras an seinem selbsterfundenen Instrument, dem Monochord, ausführte: Er spannte eine Saite auf einen länglichen Holzkasten, so daß man die durch die Schwingungen angeregten Töne lauter hören konnte. Sie können dieses Experiment selber leicht nachvollziehen, am besten mit einem Saiteninstrument, oder vielleicht auch mit einem selbstgebastelten Monochord. Die an beiden Enden befestigte Saite wird nun gezupft und es erklingt ein Ton, der Grundton oder die Schwingung der „leeren" Saite (a).

Jetzt mißt man die Länge der Saite aus, halbiert sie, und drückt sie mit einem Finger genau in der Mitte auf den Kasten. Nun zupft man erneut und - es erklingt ein viel höherer Ton, was man genau erkennt, wenn man beide Töne (Grundton und Ton der halbierten Saite schnell hintereinander zupft und miteinander vergleicht. Sie klingen jedoch verblüffend ähnlich - fast wie ein Ton! Bei der halbierten Saite handelt es sich nämlich um genau die doppelte Anzahl von Schwingungen, wodurch ein Teil von zweien im Verhältnis 1 : 2 erklingt (b) Dieser Ton wird Oktave genannt.



Als nächstes legte Pythagoras den Finger genau an den dritten Teil der Saite, und als er sie nun wieder anzupfte, geschah etwas merkwürdiges: die beiden Saitenteile rechts und links vom Finger schwangen nämlich nicht jeweils in einem Bogen, so wie bei der Teilung in der Mitte, sondern das längere Stück schwang in zwei Bögen, die beide genau die Länge vom kleineren Saitenstück hatten, so als hätte eine Geisterhand an einer weiteren Stelle einen Finger angelegt (c). Es erklingen auf diese Weise zwei Teile von dreien (Verhältnis 2 : 3). Auf der einen Seite der heruntergedrückten Saite erklingt ein Ton, der zum Grundton in einer ganz bestimmten Proportion steht. Wenn man den anderen, kürzeren Teil der heruntergedrückten Saite (Verhältnis 1 : 3) anzupft, erklingt aber ein anderer Ton, der diesem sehr ähnlich ist. Er ist dem vom Verhältnis 2 : 3 genauso ähnlich wie es der Grundton im Vergleich mit dem durch die Halbierung der Saite erzeugten Ton war. Welcher ist es wohl?

Vergleicht man den so erzeugten Ton mit dem Grundton, der Grundschwingung, so kann man ebenfalls einen angenehmen harmonischen Klang hören.

Als nächstes teilte Pythagoras die Saite in vier Teile, und drückte mit dem Finger den vierten Teil herunter. Wiederum zeigte sich das Phänomen: die Geisterhand legte ihren Finger an die anderen zwei Enden der in vier gleiche Teile geteilte Saite (d)! Hier erklingt nun also auf der einen Seite des Fingers der dritte Teil von insgesamt vier Teilen, also das Verhältnis 3 : 4. Wie man hören kann, klingt auch dieser Ton verglichen mit der Ausgangsschwingung der ganzen Saite (dem Grundton) recht angenehm zusammen. Wenn man wieder den kleinen anderen Teil (Verhältnis 1 : 4) anzupft (e), erklingt ein weiterer Ton, der uns sicher auch angenehm im Zusammenklang der beiden anderen vorkommt.

Alle diese so gefundenen Schwingungen, die sich aus ganzzahligen Unterteilungen einer Saite ergeben, bilden für unser Ohr jeweils einen „schön" klingenden Zusammenklang mit der leeren Ausgangssaite, deshalb nannten die Pythagoräer ihn „synphon".

(*Aus: Caroline Hartmann, „Warum ist das Schöne schön?"*)

Kapitel 4: Isoperimetrische Vielecke

Wir sehen, daß die Idee des Cusaners, den zu einem Dreieck isoperimetrischen Kreis aufzusuchen, sich fundamental von den früheren Untersuchungen der Alten oder des Archimedes unterscheidet. Nikolaus hatte erkannt, daß die natürliche Verstand des Menschen die extremen Gegensätze nicht zu vereinigen vermag: Einerseits den Kreis, der in jedem beliebig kleinen Bereich gekrümmt ist bzw. eine „Einheit" als krumme Linie ohne Anfang und Ende darstellt, und andererseits die „Vielheit" des Geraden, nämlich Vielecke mit immer mehr Seiten und Ecken.

Solche Widersprüche lassen sich durch verstandesmäßiges Denken allein nicht zusammenbringen; dies gelingt uns nur auf einer „höheren" geistigen Stufe. Aber es ist dennoch möglich, und Nikolaus Cusanus hat dies in seiner Schrift *Über den Beryll* folgendermaßen begründet:

„...Ferner mußt du Dir den Satz des Protagoras merken, daß der Mensch das Maß aller Dinge ist. Denn mit den Sinnen mißt der Mensch das sinnlich Wahrnehmbare, mit der Vernunft das Vernunftgemäße, und was über das Vernunftgemäße hinausgeht, erreicht er durch Überschreiten seiner Erkenntniskraft."

Wie aber können wir unsere Erkenntniskraft überschreiten? Hört sich das nicht ein bißchen mystisch an? Das ist es aber ganz und gar nicht! Nikolaus hatte eine Idee, wie er dieses „Überschreiten der Erkenntniskraft" bildlich darstellen kann: Ausgehend vom Dreieck begann er jeweils die einbeschriebenen und umschreibenden Kreise vom Dreieck, dann des zum Dreieck umfangsgleichen regelmäßigen Vierecks, Fünfecks usw. miteinander zu vergleichen, denn...

„...die Kunst, die ich suche, leistet außer dem in der Geometrie schon Überlieferten die Verwandlung des Gekrümmten in das Gerade und des Geraden in das Gekrümmte. Da zwischen diesen Größen kein rationales Verhältnis bestehen kann, muß sich das Geheimnis hier in einer Koinzidenz der Extreme verbergen. Da diese Koinzidenz im Maximum statthat (wie anderweitig dargetan wird), und das Maximum der unbekannte Kreis ist, wird hier gezeigt, daß sie im Minimum - das ist das Dreieck - aufgesucht werden muß" (*De geometricis transmutationibus*, „Von den geometrischen Verwandlungen").

Wenn einem die Möglichkeit des Menschen, seine Erkenntniskraft zu überschreiten, zuerst ein wenig mystisch vorkommt, dann deshalb, weil heute alles, was mit „eigenen" Hypothesen, Vermutungen und Ideen zu tun hat, tunlichst aus Wissenschaft, Politik oder Kunst herausgehalten wird. Die großen Entdeckungen der Geschichte sind aber immer von einzelnen Menschen und deren „Vermutungen" bzw. Hypothesen und Ideen gemacht worden.

Bei der Betrachtung des Dreiecks mit seinem Umkreis, dessen Radius r_3 gleich dem Abstand vom Mittelpunkt zu einer Ecke ist, und seinem Inkreis, dessen Radius ς_3 gleich dem Abstand vom Mittelpunkt zu einer Seitenmitte ist, hatten wir uns gefragt, wo denn nun der isoperimetrische Kreis zu finden sei: innerhalb der beiden Kreise oder außerhalb (siehe *Abbildung 9*)?

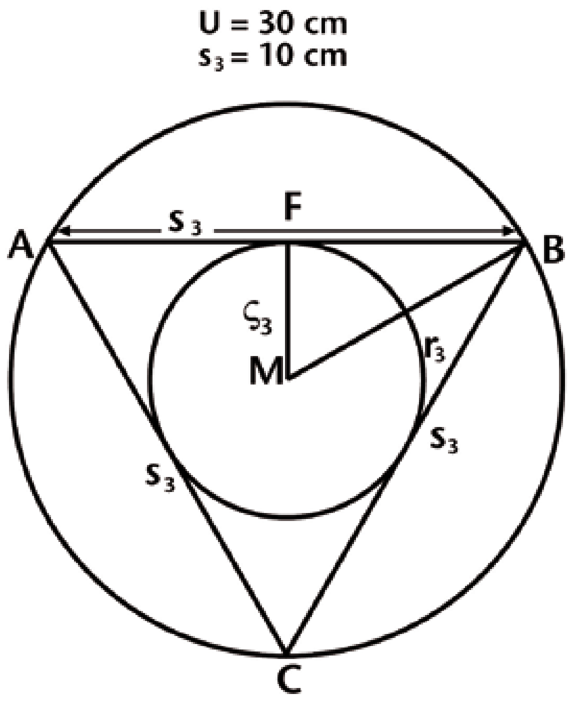


Abbildung 9: *Das Dreieck mit dem Inkreis (Radius ς_3) und dem Umkreis (Radius r_3). Die Frage, die Cusa stellt, ist: Wo liegt der zum Dreieck umfangsgleiche (isoperimetrische) Kreis?*

Als nächstes befaßten wir uns mit den Flächen der umfangsgleichen Vielecke, um herauszufinden, ob ihre Flächen bei wachsender Seitenzahl größer oder kleiner werden.

Wie steht es nun mit diesen Flächen? Wir hatten in der letzten Folge von dem Gelehrten Bradwardine erfahren, daß die Fläche eines zum Dreieck isoperimetrischen Vierecks größer ist als die Dreiecksfläche. Wir können getrost annehmen, daß dies auch für das gleichseitige Viereck oder Quadrat gilt. Betrachten wir nun das regelmäßige Viereck, Fünfeck und Sechseck - alle, wohlgemerkt mit dem gleichen Umfang wie das Dreieck in *Abbildung 9*.

Am besten wäre es, wenn Sie diese Vielecke einmal selber zeichneten. Nehmen Sie einfach einen Umfang, zum Beispiel 30 cm, und teilen Sie diesen erst in drei Teile für das Dreieck, dann in vier für das Viereck, fünf für das Fünf- und sechs für das Sechseck (*Abbildung 10a-d* - die absoluten Längen erscheinen hier wegen der Platzbeschränkung natürlich in einem anderen Größenverhältnis). Die Dreieckseite s_3 ist also 10 cm lang, die Viereckseite s_4 = 7,5 cm, die Seite s_5 des Fünfecks 6 cm, und die des Sechsecks s_6 = 5 cm.

Zeichnen Sie nun die Verbindungslinien vom Mittelpunkt zu den jeweiligen Ecken unserer Vielecke ein. Wie Sie sehen können, besteht jedes Vieleck aus ebenso vielen kleinen Dreiecken, wie es Seiten hat. Die Verbindungslinien von M zu den Ecken sind auch die Radien der die Vielecke umschreibenden Kreise, der sogenannten Umkreise. Sie sind in einem regelmäßigen Vieleck alle gleich lang. Im Quadrat haben wir r_4, im Fünfeck r_5 und im Sechseck r_6. Für alle weiteren

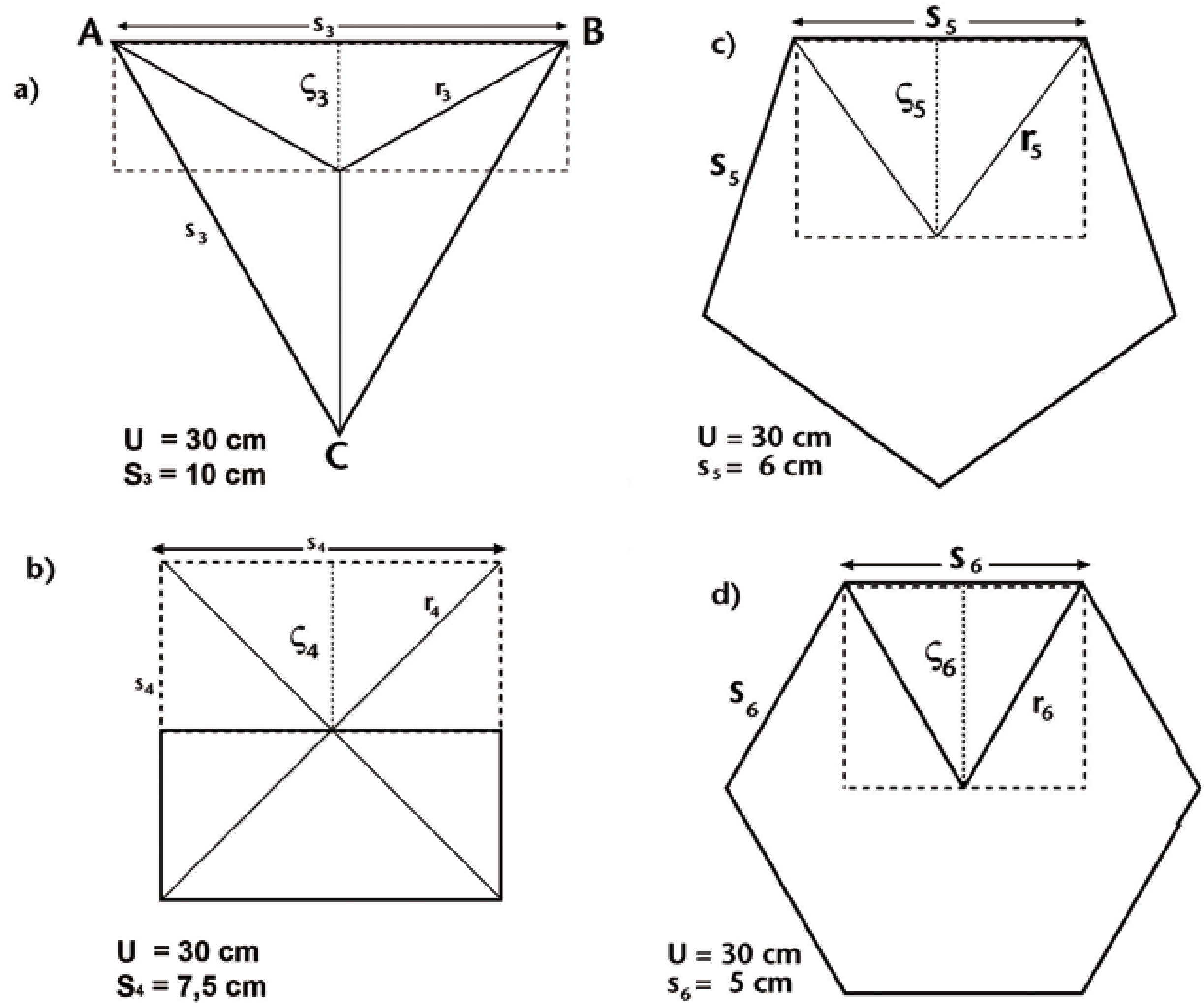


Abbildung 10 a-d: *Die Vielecksflächen kann man ermitteln, indem man jeweils n-mal die kleinen Dreiecke mit den Seiten sn und rn addiert. N repräsentiert dabei die Anzahl der Seiten, beim Dreieck ist also n = 3, beim Vierecke n = 4, beim Fünfeck n = 5 usw.*

Vielecke können wir den Radius einfach allgemein mit r_n bezeichnen. Da auch die Seiten der regelmäßigen Vielecke jeweils gleich lang sind, haben wir es also in jedem Vieleck mit n kleinen Dreiecken mit den Seiten s_n, r_n und noch einmal r_n zu tun. Die „Höhe" der kleinen Dreiecke ist dabei der Radius ς_n des Inkreises des jeweiligen Vielecks, n ist die Zahl der Ecken, also ς_3, $\varsigma_{4\ \text{etc.}}$. Dieser Kreis war derjenige, auf dessen Umfang alle Mittelpunkte der Seiten des Vielecks liegen. Diesen Inkreisradius bezeichnen wir beim regelmäßigen Viereck mit ς_4, beim Fünfeck mit ς_5, beim Sechseck mit ς_6 usw., allgemein mit ς_n.

Die *Fläche* dieser kleinen Dreiecke läßt sich folgendermaßen ermitteln: Nehmen Sie zuerst die Fläche der durch die Vieleckseite s_n und die Höhe des jeweiligen Dreiecks (das ist der Inkreisradius) ς_n gebildeten Rechtecks (in unserer Abbildung durch gestrichelte Linien gezeichnet). Diese ist jeweils doppelt so groß wie die Fläche des kleinen Dreiecks.

Um nun die Fläche des ganzen Vielecks zu erhalten, müssen wir n-mal (beim Viereck viermal, beim Fünfeck fünfmal usw.) die Fläche der kleinen Dreiecke addieren. Die Fläche F_n eines beliebigen isoperimetrischen Vielecks ist also das Produkt aus n halben Rechtecken mit den Seiten ς_n und s_n.

Wenn wir hier beachten, daß der Umfang U für alle Vielecke derselbe ist und mit steigender Seitenzahl in jeweils n immer kleiner werdende Seiten aufgeteilt wird, so bedeutet das: U ist das Produkt aus der Seitenzahl n und der jeweiligen Seitenlänge s_n, also:

$$U = 3 \bullet s_3 = 4 \bullet s_4 = 5 \bullet s_5 \text{ usw.,}$$

bzw. allgemein ausgedrückt $U = n \bullet s_n$. Oder noch einmal anders ausgedrückt: $s_n = U/n$. Wir haben auch schon vorher gesehen, daß die Seitenlänge der Vielecke mit steigender Seitenanzahl immer kleiner wird.

Wenn Sie die selbstkonstruierten Vielecke genau betrachten, dann stellen Sie fest, daß die Inkreisradien mit steigender Seitenzahl im Gegensatz zu den kleiner werdenden Seitenlängen immer ein wenig länger werden! Wie ist es aber nun mit den Flächen? Können wir aus der bisherigen Betrachtung schon erkennen, ob die Flächen tatsächlich immer größer werden?

Betrachten wir nun den Prozeß, den Inkreisradius und Umkreisradius mit steigender Anzahl der Seiten der Vielecke durchmachen. Können wir eine Gesetzmäßigkeit erkennen, ohne daß wir bis ins Unendliche Vielecke zeichnen müssen?

Nikolaus Cusanus behauptet, daß der isoperimetrische Kreis dort zwischen In- und Umkreis des Ausgangsdreiecks liegt, wo Inkreis- und Umkreisradius zusammenfallen werden, sie werden nach einem unendlichen Prozeß der Annäherung zu einem Kreis zusammenfallen. Außerdem sagt er, daß die Fläche des isoperimetrischen Kreises größer als die Fläche aller isoperimetrischen Vielecke ist. Dabei habe das Dreieck den kleinsten Inkreisradius und den größten Umkreisradius. Die Differenz zwischen Umkreis- und Inkreisradius wird sich immer mehr verringern, bis beide Radien im isoperimetrischen Kreis zusammenfallen. Wenn wir über diesen „unendlichen" Prozeß nachdenken, fragen wir uns etwas verwirrt, ob dies wohl jemals eintreten wird? Und wenn, dann wo? Wo liegt das Unendliche...?

Diese Suche nach dem Unendlichen durch einen Prozeß des ständigen Vergleichens der In- und Umkreisradien - immer mit dem letztendlichen Ziel der „Einheit" des Kreises, in dem das Verglichene in eins fällt, vor Augen - hat Nikolaus als den eigentlich *lebendigen Prozeß* des menschlichen Geistes erkannt. Er erklärt dies folgendermaßen in seiner Schrift *De docta ignorantia*:

„Noch eine weitere Einsicht wollen wir aus dieser Quelle schöpfen: In den Gliedern eines Gegensatzes finden wir ein Mehr und Minder, so beim Einfachen und Zusammengesetzten, beim Abstrakten und Konkreten, beim Formalen und Materialen, beim Vergänglichen und Unvergänglichen usw. Man kommt daher nie zu einem reinen Verhältnis der Gegensätzlichkeit oder zu einem Dritten des Vergleichs, auf das sich die Glieder des Gegensatzes genau beziehen. Alles Entgegengesetzte besitzt also Stufen der Verschiedenheit, indem es vom einen mehr, vom andern weniger hat und den Charakter eines Gliedes des Gegensatzpaares erst dadurch erhöht, daß das eine das andere übertrifft. Hierauf beruht die vernunftgemäße Erforschung der Dinge, daß wir wissen, wie im einen die Zusammensetzung in einer gewissen Einfachheit besteht, im anderen die Einfachheit in der Zusammensetzung, im einen die Vergänglichkeit in Unvergänglichkeit, im anderen umgekehrt usw., wie wir in der Schrift *Über die Vermutungen* breiter ausführen werden."

Und in den „Vermutungen" erklärt er:

„Der menschliche Geist schließt bei seiner vernunftmäßigen Forschung das Unendliche aus dem Kreis des für ihn Erfaßbaren aus. Für ihn unterscheidet sich kein möglicher Gegenstand von irgendeinem anderen durch einen unendlichen Unterschied. Jeder mögliche Unterschied zwischen Gegenständen ist geringer als ein unendlicher. Im unendlichen Unterschied aber werden Unterschiedenheit und Übereinstimmung gleich, wie man auch den Begriff der Übereinstimmung fassen mag. Ein jegliches Seiendes hat also mit jedem beliebigen anderen Übereinstimmendes und Unterscheidendes, wenn auch nicht in strenger Genauigkeit, die es innerhalb der Welt nicht geben kann..." (*De coniecturis*, „Über die Vermutungen").

Doch während dieses lebendigen Prozesses behält der menschliche Geist immer die Idee der höchsten Einheit, in unserem geometrischen Beispiel verkörpert als der isoperimetrische Kreis. Und dies ist durch eine ganz einfache Idee zu erklären, die sich der Cusaner am Rande seiner Handschrift des *Parmenides*-Kommentars des Proklos in der Bibliothek von Kues notierte:

„Das Eine und die Vielheit sind nicht im Geist, sondern sie sind der Geist; hier ist alles Eines und Vieles zugleich."

Das intensive Studium der Geometrie war ein wichtiger Teil der kulturellen Blüte des antiken Griechenland, und das Studium der griechischen Entdeckungen und Erkenntnisse durch Nikolaus von Kues und andere gab wichtige Anstöße für die Entwicklung der europäischen Renaissance des 15. Jahrhunderts.

Ausschnitt aus „Die Schule von Athen", Wandgemälde von Raffaello Sanzio in der Stanza della Signatura des Vatikan (1510-1511).

Kapitel 5: Inkreise und Umkreise

Durch die Untersuchung von isoperimetrischen Vielecken - also denjenigen, die alle den gleichen Umfang haben - gelangen wir also irgendwann zum isoperimetrischen Kreis. Doch nicht einfach durch die Konstruktion weiterer Vielecke, sondern durch einen Prozeß, der dem *lebendigen Prozeß* des menschlichen Geistes ähnelt: nämlich durch beständiges Vergleichen der Inkreis- und Umkreisradien und der Idee, daß diese „Unterscheidungen" sich im isoperimetrischen Kreis in eins auflösen müssen. Denn dort sind In- und Umkreis eins: der isoperimetrische Kreis selbst. Der menschliche Geist arbeitet durch ständiges Vergleichen und kann durch seine Erkenntniskraft das Unendliche, also die Lösung des Paradoxes „sehen".

In seiner Schrift *Über die Vermutungen* erklärt Nikolaus von Kues die für den einfachen Verstand so mühselige Suche nach dem „unendlichen" Ort des Kreises als Paradoxon zwischen der Erkenntnis durch die Vernunft und die niemals genaue „Abbildung" in der realen, sinnlichen Welt folgendermaßen:

„Jede der Einheiten ist in ihrem eigentlichen Sein nicht mitteilbar, nicht erklärbar, nicht erfaßbar. Jedes Seiende ist nur in seinem eigentlichen Sein ganz es selbst, in jedem anderen aber kann es sich nur uneigentlich repräsentieren. So ist der Kreis, als ein Gegenstand der Vernunft, in seinem eigentlichen Sein nur in der Vernunft selbst erfaßt. Betrachtet Ihr nämlich die Figur, von deren Mittelpunkt zum Umfang alle Geraden gleich lang sind, so faßt Ihr in dieser Figur durch die Vernunft den Kreis als Gegenstand der Vernunft. Aber außerhalb der Vernunft selbst ist er eine mit den Sinnen wahrnehmbare Figur, also in einem ihm uneigentlichen Sein und daher nicht sein Sein selbst... Die sichtbare Kreisfigur nimmt zwar, trotz ihres Andersseins, an der Einheit des rationalen Seins des Kreises teil; aber die Genauigkeit des Kreis-Seins wird ihr dabei nicht mitgeteilt. Die Vervielfältigung jener Einheit geht nicht ohne Anderssein ab. Keine sichtbare Kreisfigur genügt der Bestimmung genau gleicher Länge aller Radien; und keine dieser Figuren kann der anderen in allem gleich sein. Keine Kreisfigur, so genau sie auch erscheinen mag, gibt es, der gegenüber nicht eine noch genauere möglich wäre..." (*De coniecturis*, „Über die Vermutungen")

Cusanus folgt der Ideenlehre Platons:
Das Ideal des Kreises ist eine Idee,
ein Gegenstand der Vernunft, der in der
physischen Realität nur annähernd
erreicht werden kann.
Ausschnitt aus „Die Schule von Athen".

Mit anderen Worten. Wir können also vernunftmäßig, und auch durchaus „genau", den isoperimetrischen Kreis auffinden, doch außerhalb der Vernunft wird er nie mit absoluter Genauigkeit darstellbar sein. Das heißt, die Genauigkeit entspricht nur dem jeweiligen Grade der Vernunft, und so nähert man sich der Wahrheit „von der Vernunft her" immer mehr an, erreicht aber immer nur eine neue, „genauere" Genauigkeit.

Wir wollen uns jetzt noch einmal auf die Betrachtung der In- und Umkreise unserer Vielekke besinnen. Bei zu langem Nachdenken über das Unendliche können die Gedanken nämlich

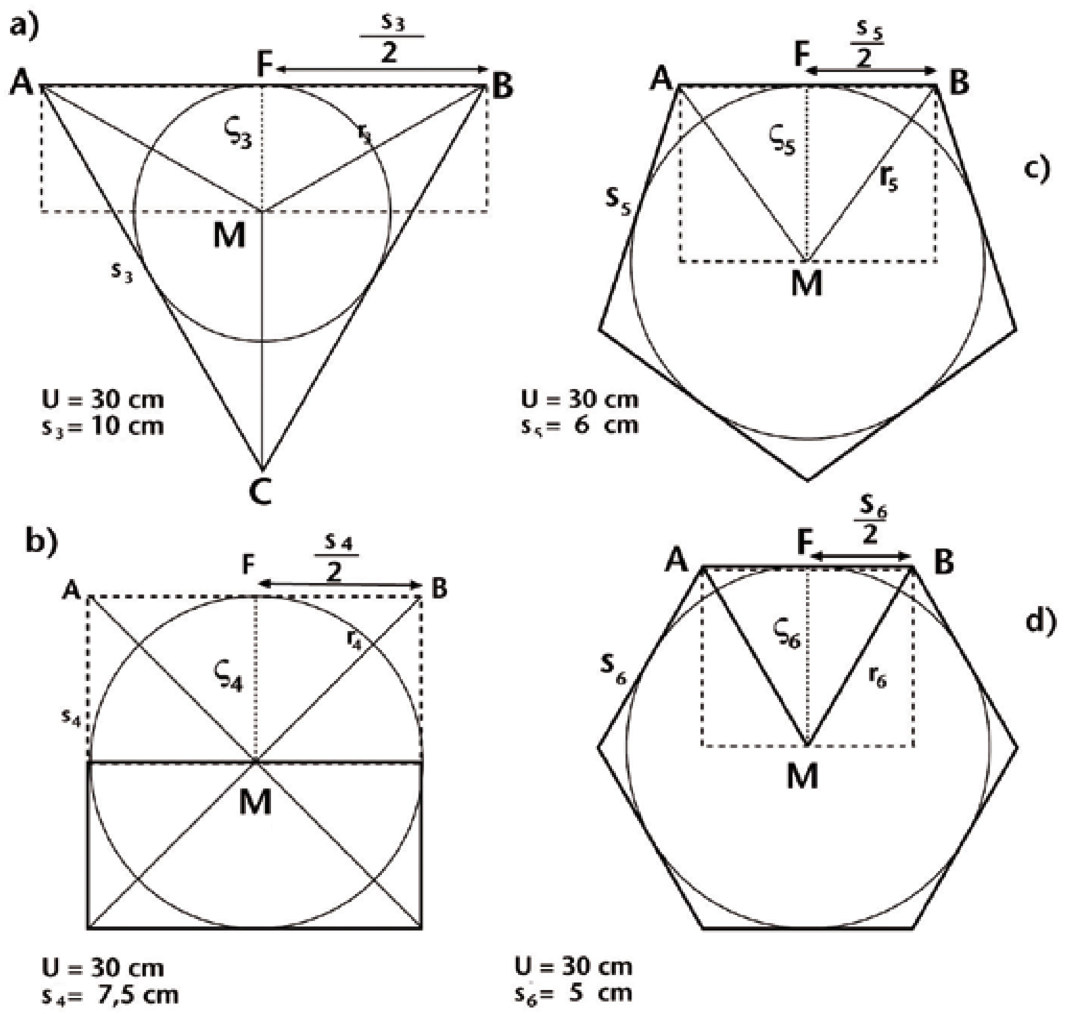


***Abbildung 11 a-d:** Mit steigender Seitenanzahl werden die Vieleckseiten immer kürzer, die Inkreisradien dagegen immer größer. Und wie verhalten sich die Umkreisradien? Übrigens: Wer Schwierigkeiten hat, den algebraischen Herleitungen zu folgen, kann sich getrost nur an den Zeichnungen orientieren. Nikolaus' Ideen werden auch dadurch verständlich.*

auf einmal so in Verwirrung geraten, daß man meint, man wüßte nicht mehr, wieviel 2 mal 2 ist. Wie wir letztes Mal schon gesehen haben, ermittelt man die Fläche der Vielecke, indem man die jeweils n kleinen Dreiecksflächen addiert, aus denen die Vielecke zusammengesetzt sind, wobei n die Anzahl der Seiten des Vielecks anzeigt (siehe *Abbildung 11 a-d*).

Nikolaus behauptet, daß die Fläche der Vielecke mit steigender Eckenzahl immer größer wird. Und das sehen wir auch leicht ein, denn U ist ja immer derselbe Umfang, und der Inkreisradius ς_n wird - wenn Sie sich die verschiedenen Vielecke noch einmal genau betrachten - immer ein klein wenig größer. Die Seitenlängen s_n sowie die Umkreisradien r_n werden dagegen aber immer kleiner!

Um dies alles besser zu verstehen, wollen wir uns das Verhältnis der Inkreis- und Umkreisradien unserer Vielecke genauer betrachten.

Zuerst zum Dreieck: Wir betrachten das rechtwinklige Dreieck FBM mit den beiden Katheten ς_3 (dem Radius des Inkreises) und $s_3/2$ sowie der Hypothenuse r_3, wobei s_3 die Dreieckseite und r_3 der Umkreisradius des Dreiecks ist. Wenn wir den Satz des Pythagoras anwenden, erhalten wir in diesem Fall folgende Beziehung zwischen dem Inkreisradius ς_3 sowie dem Umkreisradius r_3 und der Seite s_3 des Dreiecks:

$$\varsigma_3^{\,2} = r_3^{\,2} - (s_3/2)^2$$

oder ς_3

$$r_3^{\,2} = (s_3/2)^2 + \varsigma_3^{\,2}$$

Genauso ist es beim Viereck, Fünfeck usw., wenn man jeweils die entsprechenden Dreiecke betrachtet. Wenn wir uns dabei noch in Erinnerung rufen, daß die Vieleckseiten nichts anderes sind als immer der gleiche Umfang, unterteilt in n Teile (n = 3, 4, 5 usw., also die Anzahl der Seiten), so erkennen wir eine recht interessante Beziehung zwischen Inkreis- und Umkreisradius: Der Umkreisradius r_n wird nämlich immer kleiner, bleibt allerdings dabei immer größer als der Inkreisradius ς_n. Dieser wird dagegen immer größer, wie Sie ja schon in *Abbildung 11* gesehen haben, doch bleibt er immer kleiner als der Umkreisradius. Daraus ergibt sich die Vermutung, daß der Inkreisradius sich mit steigender Seitenzahl dem Umkreisradius annähert; und genau dann, wenn n *unendlich* groß wird (bzw. wenn das isoperimetrische Vieleck unendlich viele Seiten hat) - ja, was passiert dann wohl?

Und noch etwas anderes können wir feststellen, was höchst bemerkenswert ist. Am besten fertigen Sie sich dazu wieder eine Zeichnung der verschiedenen Vielecke an. Sie können wieder die gleichen Werte für den Umfang und die Seiten wie letztes Mal benutzen. Dann ist für U = 30 cm die Dreieckseite 10 cm, die Viereckseite 7,5 cm, die Fünfeckseite 6 cm und die Sechseckseite 5 cm lang. Diesmal müssen Sie aber alle Vielecke „ineinander" zeichnen, und zwar alle um den gleichen Mittelpunkt M. Wenn Sie das geschafft haben, kennen Sie auch alle Radien und können nun die jeweiligen In- und Umkreise einzeichnen (siehe *Abbildung 12*).

Hier bemerken wir eine faszinierende „Bewegung" der Umkreisradien r_3, r_4, r_5 in Richtung einer Stelle zwischen der Seitenmitte F und dem Eckpunkt B des Dreiecks. Es wäre zu mühselig, diesen Punkt, auf den sich die Umkreisradien zubewegen, rechnerisch zu ermitteln, denn wir müßten unendlich viele Vielekke mit ihren In- und Umkreisen zeichnen und berechnen - nur um schließlich festzustellen, daß man ihn immer *noch genauer* bestimmen könnte.

Dies wäre auch ein sehr formaler und wenig einsichtiger Weg zum isoperimetrischen Kreis, denn der Verstand sagt uns nur vage, dort müsse „irgendwo" die Stelle liegen, wo der Radius des isoperimetrischen Kreises die Dreieckseite zwischen F und B schneidet. Unsere

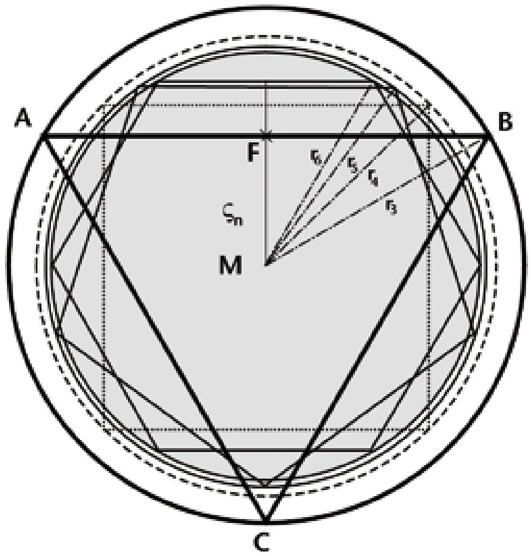


Abbildung 12: *Abbildung 12: Dreieck, Viereck, Fünf- und Sechseck mit ihren Umkreisen. Man erkennt deutlich die „Bewegung" des Umkreisradius in Richtung des Punktes F.*

Erkenntniskraft kann diesen Ort aber auf ganz andere Weise ermitteln. Nikolaus beschreibt dies so:

„Es muß also zwischen diesen zwei Punkten - dem Endpunkt und dem Mittelpunkt der Seite (er meint die Punkte B und F, an denen Inkreis- und Umkreisradius auf die Dreiecksseite treffen, C.H.) - ein Punkt liegen, so daß, wenn die Verbindungslinie zwischen diesem Punkt und dem Mittelpunkt des Umkreises in einem bestimmten Verhältnis verlängert wird... daß dann die verlängerte Strekke gleich dem Halbmesser (Radius) des isoperimetrischen Kreises ist. Daran kann kein Zweifel bestehen. Es trifft sich aber, daß dieser Punkt in allen Vielecken von den beiden anderen Punkten, nämlich vom Endpunkt und vom Mittelpunkt der Seite, verschiedenen Abstand hat. Er nähert sich der Seitenmitte und rückt vom Endpunkt ab, je größer die Vieleckfläche wird. Wie sich also dieser Punkt in Vielecken mit wachsender Fläche der Seitenmitte ständig nähert bis zum Zusammenfallen dieser drei Punkte im größten Vieleck, so rückt er notwendig in Vielecken mit geringerer Fläche von der Seitenmitte ab, bis er im kleinsten Vieleck von beiden Punkten den größten Abstand hat." (*De circuli Quadratura*, „Von der Quadratur des Kreises")

Kapitel 6: Der „genaueste“ Weg zum isoperimetrischen Kreis

Jetzt wollen wir sehen, ob wir diesen Punkt tatsächlich finden und dann vielleicht auch den Radius des isoperimetrischen Kreises bestimmen können. Bis jetzt wissen wir: die Inkreisradien ς_n nähern sich den Umkreisradien r_n immer mehr an, bleiben aber stets kleiner als diese, während die Umkreisradien sich den Inkreisradien annähern, jedoch immer größer als jene bleiben. Diese Verhältnisse haben uns schon eine ganz interessante Vermutung verschafft: Denn wenn die Inkreise immer größer werden (aber immer kleiner als die Umkreise bleiben), die Umkreise aber immer kleiner werden (und dabei trotzdem immer größer als die Inkreise bleiben), dann würden an einem gewissen „Treffpunkt“ vermutlich beide im isoperimetrischen Kreis zusammenfallen, wo In- und Umkreisradius eins werden.

Doch der natürliche Verstand schreckt ein wenig davor zurück, diesen Treffpunkt, der ja erst nach einem „unendlichen“ Prozeß erreicht würde, tatsächlich als „wahr“ anzunehmen. Nikolaus hat dies immer wieder betont: Die Unendlichkeit ist nicht verstandesmäßig bzw. zahlenmäßig zu begreifen, dazu muß unsere *Erkenntniskraft* erweitert werden. Als Beispiel für diesen vielleicht etwas komplizierten Gedanken nehmen wir einmal den Kreis. Wie kann zum Beispiel ein Blinder begreifen, was ein Kreis ist? Wird er den Kreis genauso erfassen wie einer, der sehen kann? Der Cusaner erklärt diesen Unterschied zwischen dem sinnlich-verstandesmäßigen Verstehen auf der einen Seite und dem *erkenntnismäßigen* Begreifen der höchsten Idee auf der anderen folgendermaßen:

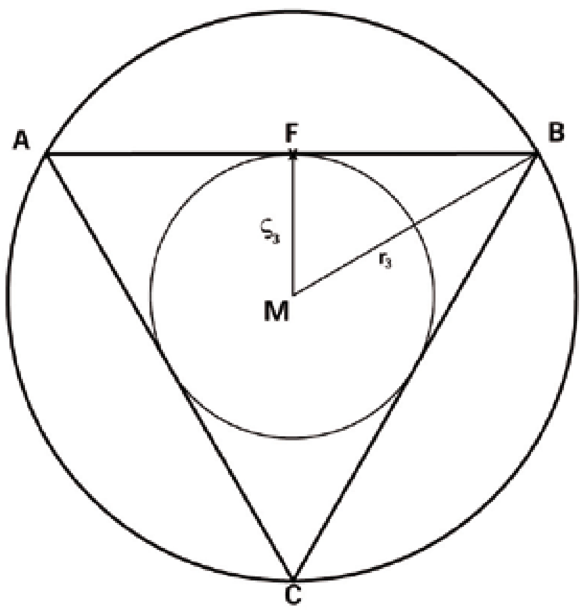


Abbildung 13: *Nikolaus betrachtete als erstes das Dreieck mit seinem In- und Umkreis. Hier ist schon der Punkt F, der Mittelpunkt der oberen Dreieckseite, markiert. Er ist für die Betrachtung der „Bewegung“ des Umkreisradius in Abbildung 14 von Bedeutung.*

„So ist der Kreis, als ein Gegenstand der Vernunft, in seinem eigentlichen Sein nur in der Vernunft selbst erfaßt. Betrachtet Ihr nämlich die Figur, von deren Mittelpunkt zum Umfang alle Geraden gleich lang sind, so faßt Ihr in dieser Figur durch die Vernunft den Kreis als Gegenstand der Vernunft. Aber außerhalb der Vernunft selbst ist er eine mit den Sinnen wahrnehmbare Figur, also in einem ihm uneigentlichen Sein und daher nicht sein Sein selbst. Ein Kreis, dessen ursprüngliches Sein in der Vernunft ist, kann nicht außerhalb der Vernunft sein. Die sichtbare Kreisfigur nimmt zwar, trotz ihres Andersseins, an der Einheit des rationalen Seins des Kreises teil; aber die Genauigkeit des Kreis-Seins wird ihr dabei nicht mitgeteilt. Die Vervielfältigung jener Einheit geht nicht ohne Anderssein ab. Keine sichtbare Figur genügt der Bestimmung gleicher Länge aller Radien; und keine dieser Figuren kann der anderen in allem gleich sein. Keine Kreisfigur, so genau sie auch erscheinen mag, gibt es, der gegenüber nicht eine noch genauere möglich wäre. Da sich die Genauigkeit des Seins in der Vernunft nicht mitteilt, schließt alles Teilhaben daran notwendig Anderssein ein. Nicht weil das Mitteilende mangelhaft wäre, verhält sich die so, sondern weil das Teilhabende ein anderes ist.“ (*De coniecturis*, „Über die Vermutungen“)

Betrachten wir nun noch einmal unser Dreieck ABC (aus Kapitel 3) mit Inkreis und Umkreis (siehe *Abbildung 13*):

Wir hatten in einer der letzten Kapiteln eine interessante „Bewegung“ des Umkreisradius‘ kennengelernt. Wenn wir nämlich, ausgehend von unserem Dreieck, weitere isoperimetrische Vielecke um den gleichen Mittelpunkt zeichnen (*Abbildung 14*), dann bewegte sich der Umkreisradius von Eckpunkt B des Dreiecks immer mehr nach links in Richtung der Seitenmitte F. Der Umkreisradius r_3 schneidet die obere Dreieckseite ganz rechts im Punkt B, beim Viereck ist der Schnittpunkt von r_4 und der Dreieckseite schon ein ziemliches Stück nach links Richtung Seitenmittelpunkt F gerückt, beim Fünfeck noch ein Stück weiter und so fort.

Die Strecken, um die r jeweils nach links rückt, werden aber immer kürzer. In Anbetracht dieses Phänomens hat Nikolaus Cusanus nun einige Hypothesen aufgestellt:

Erstens vermutet er, daß diese „Bewegung“ des Umkreisradius - wenn man immer mehr und vieleckigere Vielecke zeichnet, bis im „Unendlichen“ Umkreis- und Inkreisradius zusammenfallen - zu genau dem Punkt führen muß, wo der Radius des gesuchten isoperimetrischen Kreises die betrachtete Dreieckseite schneidet.

Und zweitens vermutet der Cusaner, daß man nicht nur den Schnittpunkt dieses Radius, sondern auch den Radius selbst „genau“ ermitteln könne. Der Radius hört ja am Schnittpunkt mit der Dreieckseite nicht auf, sondern geht noch weiter bis zum isoperimetrischen Kreis. Man muß ihn also vom Schnittpunkt aus noch um ein gewisses Stückchen verlängern. Um die Länge dieses Stückchens und den Schnittpunkt aufzufinden, führt Nikolaus eine Betrachtung von Proportionalitäten durch, die wir nachher betrachten wollen.

Doch machen die kühnen Vermutungen des Cusaners uns nicht ziemlich stutzig? Was soll das bedeuten: Zuerst sollten wir einsehen, daß der Zusammenfall von Umkreis und Inkreis irgendwo im Unendlichen stattfindet, dann bemerkten wir, daß r_n mit wachsender Seitenzahl der Vielecke eine Bewegung vollführt, die ebenfalls irgendwo im Unendlichen enden soll, und angesichts dieser „unendlichen Geschichte“ sollen wir nun eine *bestimmte* Länge einer Strecke finden, die durch einen *bestimmten* Schnittpunkt hindurchführt?

Nun, das kann ganz schön verwirrend werden. Wenn Sie aber an Nikolaus‘ Gedanken über den Unterschied zwischen dem rein zahlenmäßigen

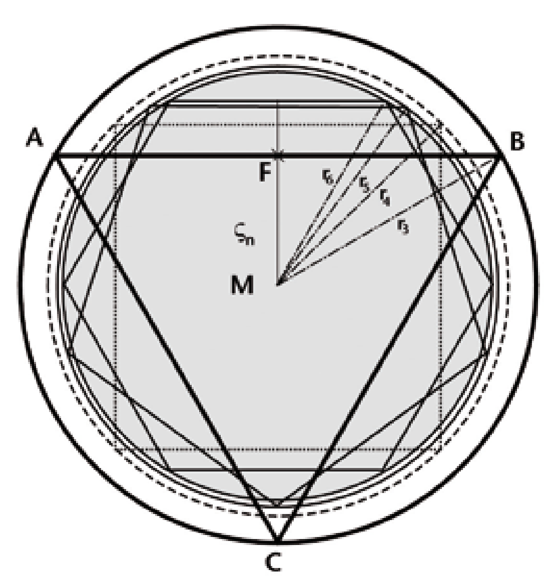


Abbildung 14

Verstand und dem zu immer größerer Erkenntniskraft fähigen menschlichen (gottesähnlichen) Geist denken, dann ahnen Sie, worauf er hinauswill. Wie auch bei anderen „Paradoxa“, die uns im täglichen Leben, bei der Betrachtung der Natur oder überhaupt bei Dingen begegnen, die uns vor ein großes „Warum?“ stellen, beginnt mit dem Paradox zugleich ein geistiger Prozeß.

Auf der einen Seite versorgt uns der Verstand mit immer mehr Einzelinformationen zu dem betrachteten Bereich, so daß wir das „Umfeld“ sozusagen verstandesmäßig immer mehr umzingeln können; auf der anderen Seite versucht der erkennende Geist, eine Idee hinter der ganzen Sache zu entdecken, oder besser gesagt: Den höheren Sinn, den Grund, warum etwas *so* und nicht irgendwie anders ist. Und diese beiden Prozesse greifen beständig ineinander, bis die „Idee“ die *richtige* ist und der Verstand in Erwägung aller Umstände und Feinheiten zustimmend ausruft: Genau das ist es! Oder anders ausgedrückt: der menschliche Geist ist so beschaffen, daß er in ständigem Denkprozeß tätig ist. Ein ständiger Arbeitsprozeß.

Der große Universalgelehrte Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) hat ca. 240 Jahre nach Nikolaus von Kues diesen Prozeß des „Erreichens des Unendlichen“ und Definierens eines ganz bestimmten Wertes in seiner Infinitesimalrechnung entwickelt. Er hat daraus eine ganz neue Mathematik entwickelt, mit der der Mensch diese unendlichen Prozesse und Bewegungen aller Art, die man nun als Kurven darstellen konnte. Er war überzeugt: Wo die Mathematik bzw. der

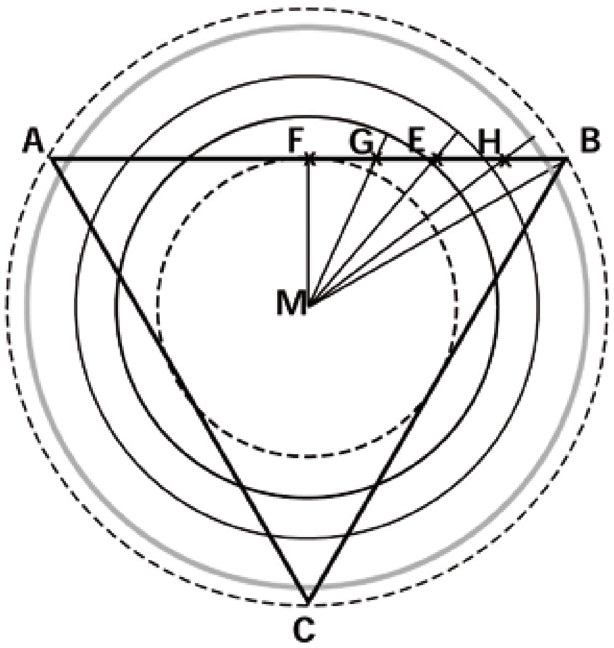


Abbildung 15: *Bei der Verlängerung der Strecke MG um 1/8 oder 3/8 bleibt diese immer kleiner als der gesuchte isoperimetrische Radius. Wenn man dagegen die Strecke MH um 3/8 bzw. 1/8 verlängert, so wird sie immer größer als jene werden. Nur die Strecke ME erfüllt die Bedingung: Wenn man sie nämlich um ¼ verlängert, wird sie zum isoperimetrischen Radius. Das liegt daran, daß das Verhältnis GF zur Dreieckseite AB 1/8, das Verhältnis GB zur Seite AB aber 3/8 beträgt. Und ebenso das Verhältnis von HF zur Dreieckseite AB 3/8, das von HB zu AB aber wiederum 1/8 ist. Beim Punkt E ist das anders: Beide Verhältnisse, sowie das von EF zur Dreieckseite AB als auch das von EB zur Seite AB ist beidesmal 1/4.*

normale Verstand des Menschen mit der Realität nicht mithalten kann und ein Paradox sieht, eine scheinbar unüberwindliche Grenze, da muß die Mathematik weiterentwickelt werden. Denn die Erkenntniskraft des Menschen kann auf einer neuen höheren Ebene das Paradox lösen.

Die Infinitesimalrechnung ist das beste Beispiel: in jedem noch so kleinen Punkt ist eine Kurve eine Gerade, deren „Steigung" man durch das Anlegen einer Tangente darstellen kann. Dadurch kann man den gesamten Verlauf der Kurve erkennen und in einer Formel darstellen.

Bei unserer Untersuchung aller Umstände des unendlichen Prozesses, der zum isoperimetrischen Kreis führen soll, werden wir finden, daß die Idee des Nikolaus von Kues überaus nützlich ist und daß wir uns die Unendlichkeit tatsächlich „abkürzen" und auf diese Weise doch richtig vorstellen können.

Nikolaus betrachtet nun die Dreieckseite AB mit dem Mittelpunkt F und überlegt: Wo kann wohl der Schnittpunkt des Radius des isoperimetrischen Kreises liegen?

Betrachten wir dazu das Dreieck ABC und dessen obere Seite in *Abbildung 15:* Nehmen wir einmal ganz willkürlich und versuchsweise an, der isoperimetrische Radius ginge durch einen Punkt nahe bei F - sagen wir G - und dieser Punkt sei von F genau 1/8 der Gesamtstrecke AB entfernt. Der Abstand zwischen G und B wäre dann genau 3/8 der Gesamtstrecke AB. Der Cusaner stellt nun folgende Überlegung an: Der gesuchte Radius müsse durch G in einem ebensolchen Verhältnis wie AB unterteilt werden. Deswegen verlängert er MG einmal um 1/8, ein andermal um 3/8 von MG. Bei Betrachtung dieser Proportionalitäten wird ersichtlich, daß G nicht der gesuchte Punkt sein kann, denn der Radius würde in beiden Fällen zu kurz ausfallen.

Sie können sich dies auch rechnerisch klarmachen: Dazu wählen Sie das konkrete Beispiel MB = 60 und MF = 30 (im gleichseitigen Dreieck ist der Inkreisradius halb so lang wie der Umkreisradius). Errechnen Sie nach dem Satz des Pythagoras zuerst die Dreieckseite AB:

$$(AB/2)^2 + 30^2 = 60^2$$

$$AB^2/4 = 2700$$

$$AB = 2 \bullet \sqrt{2700}$$

Dann ist der Abstand zwischen F und G ein Achtel von AB, nämlich $1/4 \bullet \sqrt{2700}$. Bei Anwendung des Satzes von Pythagoras auf das Dreieck FMG erhält man für

$$\begin{aligned} MG^2 &= FG^2 + 30^2 \\ &= 2700/16 + 900 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MG &= \sqrt{(2700/16 + 14400/16)} \\ &= \sqrt{17100} \div 4 \end{aligned}$$

Verlängert man MG nun um 1/8 seiner Länge zu 9/8 des oben errechneten Werts, so erhält

Lyndon LaRouche über Leibniz' Infinitesimalkalkulus

„Ganz einfach ausgedrückt ist das Infinitesimal des Leibnizschen Kalküls, das Leibniz aus Keplers Entdeckung der universellen Gravitation ableitete, ein ontologisches Infinitesimal, wie ich oben dargestellt habe, und kein aristotelisches, euklidisches oder kartesisches. Es ist Ausdruck der Aufwärtsbewegung physischer Entwicklung, Ausdruck eines antientropischen Universalprinzips. Die Eigenschaft als Infinitesimal entsteht (im Falle von Keplers Entdeckung) aus dem relativen Ausmaß der Wirksamkeit dieses Prinzips, indem es nämlich relativ unbegrenzt universell und wirksam ist (das *aktual Unendliche* - unendlich nicht hinsichtlich seines unmittelbaren Ist-Zustands, sondern hinsichtlich seiner künftigen Entwicklung)...

Wie ich an anderer Stelle betont habe, haben die menschlichen Geisteskräfte, die wir mit wahrer Erkenntnis in Verbindung bringen, keine einfache biologische Grundlage. Erkenntnis, wie etwa die von Johannes Kepler entdeckte Gravitation, ist Ausdruck von tatsächlich ontologisch transfiniter Geistestätigkeit. Sie ist Ausdruck eines wirklichen Prinzips des ganzen Universums, so wie auch die Gravitation ein anderes solches Prinzip ausdrückt, ein Prinzip, auf das der biologische Geistesapparat des menschlichen Individuums sozusagen „abgestimmt" ist. (Tieren hingegen fehlt eine solche Resonanz.) Das wiederholte Lösen von Rätseln, deren Lösungen im wesentlichen nichtlinear (d.h. nicht reduktionistisch) sind, indem die entsprechende Stimmung des menschlichen Wahrnehmungsapparates gestärkt wird, verbessert die Abstimmung der individuellen Erkenntniskräfte des menschlichen Geistes genauso wie die klassische Kunst (d.h. das Erbe Johann Sebastian Bachs) - wohingegen reduktionistische Erörterungen die „Stimmung" des menschlichen Geistes und die von Reduktionismus durchsetzte Kultur tendenziell stört und schwächt."

(Lyndon H. LaRouche, jun., *„Meine frühe Begegnung mit Leibniz: Über die Monadologie*", *Neue Solidarität* Nr. 51/52, 2016)

Kurfürstin Sophie setzt Gottfried Wilhelm Leibniz den Lorbeerkranz auf
Leibniz-Ehrung durch Sophie-Charlotte: Geschichtsfries am Neuen Rathaus Hannover, 1700.
(Karl Gundelach, cc)

man für den Radius des mutmaßlichen isoperimetrischen Kreises

$r_{iso} = 9/32 \bullet \sqrt{17100}$

und für den Kreisdurchmesser die doppelte Länge, nämlich

$d = 9/16 \bullet \sqrt{17100}$.

Teilt man nun den Umfang

$U = 3\ AB = 3 \bullet 2 \bullet \sqrt{2700}$

durch den Durchmesser d, so erhalten wir 4,2385..., und das ist ein viel zu hoher Wert für π.

Auch wenn wir MG um 3/8 MG verlängern, kommen wir nicht zum Ziel (wie jeder leicht selbst ausrechnen kann). Aber jetzt wissen wir immerhin, daß der Radius des isoperimetrischen Kreises *nicht durch* G verläuft (siehe *Abbildung 15*).

Machen wir, genau wie der Cusaner, einen anderen Versuch: Ziehen wir eine Linie durch einen Punkt H nahe bei B, wobei H diesmal 1/8 der Gesamtstrecke AB von B und um 3/8 der Strecke AB von F entfernt ist, und verlängern MH im Verhältnis HB/AB (= 1/8) oder im Verhältnis FH/AB (= 3/8). In beiden Fällen werden wir sehen, daß die Strecke größer ist als die gesuchte.

Nun können sich wahrscheinlich schon denken, worauf Nikolaus mit diesem symmetrischen Vorgehen hinauswill, daß er nämlich den gesuchten Schnittpunkt X des isoperimetrischen Radius mit der Dreieckseite genau in der Mitte zwischen F und B vermutet, wo er jeweils um das gleiche Verhältnis 1/4 der Gesamtstrecke AB von F wie von B entfernt ist. Das ist seine Hypothese: Wenn man MX um das gleiche Verhältnis verlängert, erhält man den Radius des isoperimetrischen Kreises.

Wird man daraus nun einen *absolut genauen* Wert für π erhalten? Hören wir, was Nikolaus von Kues über das Thema „Genauigkeit" in seinem Dialog Der Laie über den Geist zu sagen hat:

Redner: „Mit solchen Bestimmungen also, die ein Mehr oder Weniger zulassen, läßt sich kein Begriff von Gott bilden."

Laie: „Ganz richtig. Da Gott unendlich ist, sind ihm Begriffe um so weniger angemessen, je offener sie ein Mehr oder Weniger zulassen. Deshalb gibt es von diesen her keinen Zugang zum Unendlichen, wie es sich bei der Zahl oder bei der Teilung des Kontinuums feststellen läßt."

Redner: „Dann gibt es in dieser Welt überhaupt keine Genauigkeit, keine Richtigkeit, Wahrheit, Gerechtigkeit, kein Gutsein, da wir doch aus der Erfahrung wissen, daß eins genauer ist als das andere, eine Abbildung genauer als die andere. Und genau so ist es mit der Richtigkeit, denn eins ist immer richtiger als das andere und eins besser als das andere."

Laie: „Darin hast du recht. Was mit dem Mehr und Weniger nichts zu tun hat, ist nicht von dieser Welt. Hier findet man nichts, was so genau wäre, daß es nicht noch genauer sein könnte, und nichts so richtiges, daß es nicht noch richtiger, nichts so Wahres, daß es nicht noch wahrer, nichts so gerechtes, daß es nicht noch gerechter, und nichts so Gutes, daß es nicht noch besser sein könnte. Genauigkeit, Richtigkeit, Wahrheit, Gerechtigkeit, Gutsein, so wie man sie in dieser Welt antreffen kann, sind immer nur ein Teilhaben am Unbedingten, Abbildhaftes zu jenem Urbildlichen. Vom Urbildlichen spreche ich in der Mehrzahl, insofern wir die Verschiedenheit der Dinge in Bezug setzen zur Verschiedenheit ihrer Urgründe. In Wirklichkeit sind sie alle in einem einzigen Urbild, denn im Unbedingten fallen sie zusammen." (*Der Laie über den Geist*)

Wenn wir jetzt noch einmal einen Blick auf unser geometrisches Beispiel dieser komplexen Überlegungen werfen, so erkennen wir, daß Nikolaus von Kues alle größeren und weiterführenden philosophischen Überlegungen darin versinnbildlicht hat. Im Aufsuchen des scheinbar unerreichbaren, „unendlich entfernten" isoperimetrischen Kreises zeigt er uns die Möglichkeit des menschlichen Geistes, dieses Unendliche - soviel es auch dem verstandesmäßigen Denken widerstreben mag - durch einen Prozeß des Vergleichens auf einer höheren Erkenntnisebene zu „ergreifen". Diese Existenz des Unendlichen als echte, mögliche Größe im menschlichen Kopfe, haben nach ihm zum Beispiel der große Gelehrte Gottfried Wilhelm Leibniz mit seiner Idee der Infinitesimalrechnung und auch der bedeutende Mathematiker Georg Cantor in seiner „Mannigfaltigkeitslehre" erwogen.

Kapitel 7: Die Kunst, zur Koinzidenz der Extreme zu gelangen

Laut Nikolaus kann der menschliche Geist durch einen Prozeß des Unterscheidens und Vergleichens seine Erkenntniskraft ausreichend vergrößern, um ein Paradox zu begreifen. Dieses Paradox besteht in unserer Untersuchung darin, daß wir das Verhältnis zwischen dem „krummen“ Kreisumfang zu seinem „geraden“ Durchmesser verstehen wollen. Hören wir den Cusaner selbst:

„Vieleckfiguren mit gleichlangen Seiten nennt man isopleure; wenn sie bei gleicher Seitenlänge den nämlichen Umfang haben, heißen sie isoperimetrisch. Unter allen isoperimetrischen Figuren hat bekanntlich das Dreieck die kleinste Fläche. Da eine isoperimetrische Figur um so mehr Fläche einschließt, je mehr Winkel sie hat, wird der Kreis unter allen isoperimetrischen Figuren die größte Fläche haben. Durch Vervielfachen der Winkel kann man ihn nicht erreichen, wie man auch bei der Zahl nicht zu einem Maximum kommen kann. Kein Vieleck kann zum isoperimetrischen Kreis ein rationales Verhältnis haben.

Weil aber die Flächendifferenz umfangsgleicher Figuren der Differenz der Halbmesser (Radien) ihrer einbeschriebenen Kreise entspricht (wie schon früher bekannt war), deshalb wird weder der einbeschriebene Kreis, der kleiner ist, noch der umbeschriebene Kreis, der größer ist, zum isoperimetrischen ein rationales Verhältnis haben. Die Differenz der Halbmesser besagter Kreise ist beim Dreieck am größten, bei anderen Vielecken wird sie schrittweise kleiner. Beim isoperimetrischen Kreis fallen die Halbmesser zusammen, da hier Inkreis, Umkreis und Kreis selbst zusammenfallen. Es ist also zu untersuchen, durch welche Kunst wir zur Koinzidenz und zu unserm Ziel gelangen können.“ (*De geometricis transmutationibus*, „Von den geometrischen Verwandlungen“)

Betrachten wir noch einmal das Dreieck ABC. Wir hatten gesehen, daß die Schnittpunkte der Radien mit der oberen Seite des Dreiecks bei den verschiedenen isoperimetrischen Vielecken unterschiedlich weit vom Eckpunkt B und dem Seitenmittelpunkt F entfernt sind. Sie nähern sich F und rücken von B ab, je mehr Seiten das Vieleck hat bzw. je größer die Vieleckfläche wird (siehe *Abbildung 16*).

Wie sich also dieser Schnittpunkt in Vielecken mit wachsender Fläche der Seitenmitte (bzw. einem Punkt zwischen Seitenmitte F und Dreiecksecke B) stetig nähert bis zum Zusammenfallen dieser drei Punkte im größten Vieleck, so rückt er notwendig in den Vielecken mit geringerer Fläche von F ab, bis er im kleinsten Vieleck wieder am Eckpunkt B anlangt.

In seiner Schrift *Über die Vermutungen* schreibt Nikolaus von Kues:

„Die Genauigkeit der Wahrheit ist unerreichbar. Daraus ergibt sich, daß der Mensch nur in der Weise der Vermutung zu wahren Aussagen gelangen kann. Denn im Erfassen des Wahren gibt es eine unaufhörliche Steigerung. Deshalb steht auch unser tatsächliches Wissen in keinem Verhältnis zu jener höchsten, für den Menschen unzugänglichen Wissenschaft, und die Unsicherheit unseres schwächlichen Erfassens läßt unsere Feststellungen hinter der reinen Wahrheit als bloße Vermutungen des Wah-

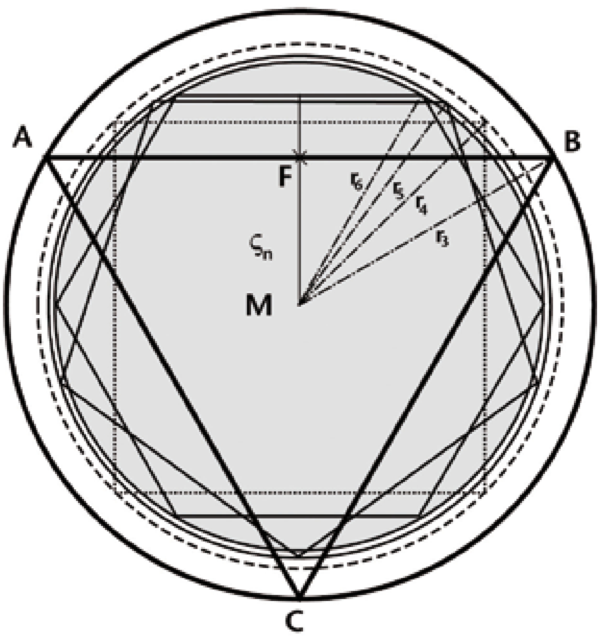


Abbildung 16

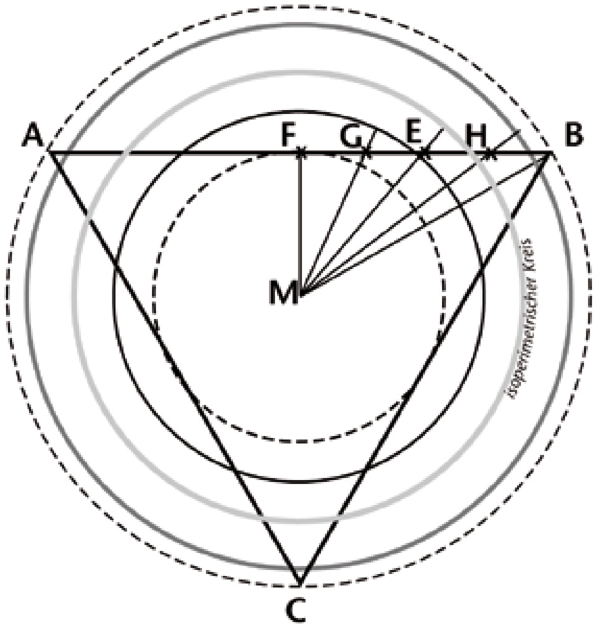


Abbildung 17: *Wie Nikolaus vermutete, führt der gesuchte Radius des isoperimetrischen Kreises durch den Punkt E. Das Verhältnis der Strecke EF ist dasselbe wie EB zu AB, nämlich 1/4. Wenn man die Strecke ME um 1/4 verlängert, wird sie zum isoperimetrischen Radius.*

ren zurückbleiben.“ (*De coniecturis*, „Über die Vermutungen“)

Nikolaus nahm nun an, daß der Schnittpunkt X des gesuchten Radius des isoperimetrischen Kreises mit der Dreiecksseite AB diese in den gleichen Proportionen unterteilen müsse wie den Radius selbst: Also müsse man die Strecke vom Mittelpunkt M bis X im gleichen Verhältnis verlängern wie der Abstand XF zur Dreieckseite AB, also in diesem Falle XF/AB, oder wie der Abstand XB zur Dreieckseite AB, also XB/AB. Alles kam nun darauf an, das richtige Verhältnis zu finden. In der letzten Folge war unser Radius entweder zu kurz oder zu lang geraten, und wir waren auf die Vermutung verfallen, daß unser gesuchter Punkt X genau in der Mitte zwischen den Punkten F und B liegen müsse. Für diesen Punkt E sind die Verhältnisse EF/AB sowie EB/AB beide die gleichen, nämlich jeweils ein Viertel (siehe *Abbildung 17*).

Dies wollen wir jetzt an einem Zahlenbeispiel überprüfen, und Sie werden sehen, daß wir sogar einen relativ genauen Wert für π erhalten werden. Erschrecken Sie dabei nicht über die viele Rechnerei. Sie ist keineswegs Selbstzweck, sondern Abbild für etwas anderes. So schreibt Nikolaus von Kues selbst über Sinn und Bedeutung der Geometrie und Mathematik:

„Alles Sinnliche aber ist, auf Grund der in ihm überschießenden Möglichkeit der Materie, in fortwährender Unbeständigkeit. Wenn man aber abstraktere Gegenstände als jene betrachtet, nämlich solche, die zwar nicht völlig der materiellen Beimengung entbehren, ohne die sie nicht vorgestellt werden könnten, aber auch nicht nur einem vagen Möglichkeitsdenken zugrunde liegen, so sehen wir, daß es solche von höchster Beständigkeit und für uns von höchster Gewißheit gibt. Von dieser Art sind die mathematischen Gegenstände. Daher haben die Weisen Beispiele für Dinge, die nur mit der Vernunft zu erforschen sind, mit Recht aus dem mathematischen Bereich genommen; und keiner der Alten, sofern er für bedeutend gehalten wird, ist an schwierige Probleme anders als mit einem mathematischen Vergleich herangegangen...

Hat nicht Pythagoras, der erste Philosoph dem Namen und der Sache nach, die gesamte Erforschung der Wahrheit auf die Mathematik gegründet? Die Platoniker und die ersten christlichen Philosophen sind ihm darin so weit gefolgt, daß Augustinus und nach ihm Boethius behaupteten, das ursprüngliche Urbild der zu schaffenden Dinge in Gottes Vernunft sei ohne Zweifel die Zahl gewesen...

Auf diesem Wege der Alten schreiten wir, mit ihnen gehen wir zusammen, wenn wir sagen: Können wir uns dem Göttlichen auf keinem anderen Wege als durch Symbole nähern, so werden wir uns am passendsten der mathematischen Symbole bedienen, denn diese besitzen unzerstörbare Gewißheit.“ (*De docta ignorantia*, „Die belehrte Unwissenheit“)

Wenden wir uns aber wieder unserem Zahlenbeispiel zu, um unsere vergleichenden Überlegungen über die Verhältnisse der In- und Umkreise auf ihren Wahrheitsgehalt zu überprüfen:

Die Strecke FE beträgt genau ein Viertel der Dreiecksseite AB, d.h. FE = 1/4 AB. Wir wollen die gleichen Zahlenwerte unseres Beispiels aus der letzten Folge benutzen: Für den Inkreisradius MF des Dreiecks ABC hatten wir einen Wert von MF

Pythagoras, Skulptur von Jörg Syrlin d.Ä., Chorgestühl des Ulmer Münsters, um 1470. (Joachim Köhler, cc-by-sa 4.0)

= 30 und für den Umkreisradius MB = 60 angenommen. Eine Dreieckseite war AB = $2 \bullet \sqrt{2700}$ und die Strecke zwischen F und E ein Viertel dieses Betrages, also FE = $1/2 \bullet \sqrt{2700}$. Um nun den Zahlenwert der Strecke ME zu erhalten, wenden wir den Satz des Pythagoras auf das rechtwinklige Dreieck EFM an und erhalten folgende Beziehung:

$$ME^2 = 30^2 + (1/2 \bullet \sqrt{2700}^2$$
$$= 900 + 2700/4$$

Daraus erhalten wir:

$$ME^2 = 900 + 675 = 1575$$

und wir brauchen nur noch die Wurzel ziehen, um den Betrag der Strecke vom Mittelpunkt M zur Dreiecksseite zu erhalten, d.h.

$$ME = \sqrt{1575}$$

Jetzt müssen wir ME aber noch um ein Viertel verlängern, um dann endlich die Länge des Radius r_{iso} des isoperimetrischen Kreises vor uns zu haben:

$$r_{iso} = ME + 1/4\ ME = 5/4\ ME,$$

in Zahlen:

$$r_{iso} = 5/4 \bullet \sqrt{1575}$$

Der Durchmesser d_{iso} des isoperimetrischen Kreises ist doppelt so lang wie r_{iso}:

$$d_{iso} = 2 \bullet 5/4 \bullet \sqrt{1575}$$

Jetzt wollen wir auch das Verhältnis π zwischen Umfang und Durchmesser des Kreises berechnen, wobei wir uns erinnern, daß wie bei allen Vielecken auch der zu ihnen isoperimetrische Kreis den folgenden Umfang besaß:

$$U = 3 \bullet 2 \bullet \sqrt{2700}$$

Für das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser des isoperimetrischen Kreises ergibt sich demnach:

$$U/d = 6 \bullet \sqrt{2700} / 2 \bullet 5/4 \bullet \sqrt{1575}$$
$$= 12/5 \bullet \sqrt{2700}/\sqrt{1575}$$
$$= 3{,}1423376$$

Dies ist kein schlechtes Ergebnis für die Proportionale π! Wir hatten also mit Nikolaus von Kues ganz richtig vermutet, daß der Punkt E derjenige sei, welcher „am genauesten" den Schnittpunkt des isoperimetrischen Kreisradius mit der Dreieckseite träfe. Wie genau aber? Der Cusaner meint dazu:

„Und so kann man nicht wissen, um wieviel er (d.h. dieser Punkt, C.H.) von der letzten Genauigkeit abweicht, da er mit einer gewöhnlichen Zahl nicht erreichbar ist. Und deshalb läßt sich dieser Fehler auch nicht beheben, da er nur durch eine höhere Einsicht und keineswegs durch einen sichtbaren Versuch faßbar ist. Daraus allein kannst Du nun wissen, daß erst in dem unserem Wissen unzugänglichen Bereich ein genauerer Wert erreicht wird. Ich habe nicht gefunden, daß diese Erkenntnis bisher überliefert wurde."

Sie könnten zum Beispiel, wenn Sie noch genauere Werte für π erhalten wollen, die gleiche Prozedur bei einem Viereck, Fünfeck oder Sechseck durchführen, indem Sie jeweils die obere waagerechte Seite des Vielecks betrachten und die Werte für die Länge dieser Vielecksseite, die Strecke vom Mittelpunkt M zum vierten Teil der Seite und den Inkreisradius berechnen. Sie würden dann einen immer genaueren Wert für π erhalten!

Dennoch wollen wir uns mit dieser Erkenntnis nicht zufrieden geben, obwohl sie uns viele interessante Aufschlüsse geliefert hat. Der Cusaner hat nämlich noch eine andere geometrische „Verwandlung" erdacht, die wiederum mit dem Vergleichen und Unterscheiden der In- und Umkreise zu tun hat. Wir werden also das nächste Mal versuchen, die Leiter zu einer noch „genaueren" Wahrheit - die uns in das Gebiet der Musik führt, welche nur eine andere Form der Geometrie ist - zu erklimmen, wie es uns Nikolaus von Kues erklärt:

„So ist in jeder Untersuchung des Wahren, wo wir vom einen zur Erkenntnis des anderen fortschreiten - vom Bekannten zum Unbekannten -, das nämliche zu bemerken, wie man nämlich das Wahre auf verschiedene und mannigfache Weise vor der letzten Genauigkeit erreichen kann, durch die eine Überlegung genauer als durch die andere, durch keine aber vollkommen genau, selbst wenn der Fehler nicht in Erscheinung tritt. Das Maß, mit dem der Mensch die Erforschung der Wahrheit anstrebt, hat zur Wahrheit selbst kein rationales Verhältnis, und daher nimmt derjenige, der sich diesseits der Genauigkeit beruhigt, den Irrtum nicht wahr. Und darin unterscheiden sich die Menschen: Die einen brüsten sich, zur vollen Genauigkeit vorgedrungen zu sein, deren Unerreichbarkeit die Weisen erkennen, so daß jene die weiseren sind, die um ihre Unwissenheit wissen." (*Über die Kreisquadratur*)

In der klassischen Musik wird die höchste Idee des Komponisten zwar in den Noten ausgedrückt und durch immer besseres Studieren und Proben darstellbar, aber niemals „endgültig genau" im Sinne exakter Zahlenwerte. Im Bild das Brainin-Trio mit (v.l.) Norbert Brainin (Geige), Günther Ludwig (Klavier) und Klaus Stoppel (Violoncello). (EIRNS, Dean Andromidas)

Kapitel 8: Die Musik - eine andere Art, Geometrie zu treiben

Bei unserer Untersuchung der proportionalen Beziehung zwischen Umfang und Kreisdurchmesser haben wir jetzt so manche Geheimnisse kennengelernt. Die Untersuchung dieser „Naturkonstanten" hat uns darauf gebracht, daß es nicht unbedingt der Gipfel der Erkenntnis ist, einen möglichst genauen Wert für π zu ermitteln - denn dann hätten wir einfach auf unseren Taschenrechner drücken können -, sondern daß der menschliche Geist das hinter der Frage verborgene „Paradoxon", nämlich den Widerspruch zwischen den Extremen des „krummen" Kreisumfangs auf der einen und des „geraden" Durchmessers auf der anderen Seite irgendwie miteinander zu vergleichen, lösen will. Dies schaffen wir nicht mit dem „linearen" Verstand, doch Nikolaus von Kues hat uns den „lebendigen" Prozeß unseres Geistes, beständig Vergleiche anzustellen, gezeigt.

Der Cusaner hat auch erkannt, daß dieser lebendige Prozeß nicht nur in der Geometrie, sondern auch in der Astronomie und in der Musik angewandt wird. Denn in all diesen Bereichen kommt es darauf an, „krumme" Dinge durch gerade Verhältnisse zu erklären. In der Astronomie hat Carl Friedrich Gauß z.B. die unbekannte Bahn des Asteroiden Ceres durch die Anwendung der sphärischen Geometrie entdeckt (siehe die Geometrieserie „Wie Gauß die Bahn des Ceres berechnete, *Neue Solidarität* Nr. 1-21, 1998), in der Musik sind es die Übergänge „zwischen" den Noten bzw. den Intervallen und vor allem auch der Bau von Musikinstrumenten, die einen Vergleich zwischen „Krummem" und „Geradem" nötig machen.

Nikolaus betonte deshalb die Bedeutung seiner Entdeckung der „geometrischen Verwandlungen" für die Musik:

„Außerdem steht nach dem Vorigen fest, wie jede Strecke Seite eines Dreiecks, eines Quadrats, eines Fünfecks und so weiter sein kann, so können ungezählte krumme Linien gefunden werden, die einer gegebenen Strecke gleich sind; deshalb lassen sich auch Winkel finden, die sich wie gegebene Strecken verhalten, d.h. wie Seite und Diagonale im Quadrat oder wie Halbmesser und Umfang im Kreis, und so in allen Fällen, und ferner Flächen, die sich wie gegebene Strecken verhalten. Daraus läßt sich das, was in der Geometrie bisher verborgen blieb und was in der Musik und in den musikalischen Instrumenten unbekannt war, weiter verfolgen, so daß dem, der seinen Verstand anstrengen will, sich in aller Klarheit erschließt, was in der Geometrie je wissensmöglich war, aber nicht wirklich gewußt wurde." (*Von den geometrischen Verwandlungen*)

Stellen Sie sich vor, jemand besucht - sagen wir im Jahre 2753 - ein klassisches Konzert. Auf dem Programm stehen Werke von Mozart, eine Sinfonie von Beethoven und sogar ein Klavierkonzert von Brahms - wunderbar! Doch statt des Flügels und der Stühle und Notenständer für das Orchester steht vorne auf der Bühne nur ein glänzender Apparat. Und als die Musik beginnt, wird sie nicht von Menschen gespielt, sondern eben von diesem Apparat, einem sogenannten Synthesizer, mit dem man die Noten und alle dynamischen Zeichen wie *crescendo, diminuendo, sforzato, pianissimo* usw., die der Komponist in der Partitur vorgegeben hat, mit hoher Genauigkeit wiedergeben kann. Alle Instrumente sind verblüffend gut wiedergegeben: Geigen, Celli, Posaunen, Flöten und Pauken. Ihr Klang erinnert sogar an den der jeweils besten ältesten „realen" Instrumente aus der großen Zeit des kunstvollen Instrumentenbaus im 18. Jahrhundert. Und sogar ein *rubato* - die Möglichkeit, zur Verstärkung des Ausdrucks an bestimmten Stellen einzelne Noten länger oder eine ganze Passage langsamer zu spielen als die anderen, aber dabei trotzdem insgesamt im Tempo zu bleiben - leistet die Maschine ganz problemlos.

Einige ältere Leute aber, die sich noch an Erzählungen ihrer Vorfahren über Konzertaufführungen menschlicher Musiker und an das eigene Singen und Musizieren erinnerten, finden, daß diese Musik irgendwie anders war - nicht so „exakt schön", aber irgendwie anders schön.

Diese „Vorschau" in die Zukunft mag manchem übertrieben vorkommen, doch wenn man heute eine brandneue „exakt schöne" Hifi-Aufnahme anhört und sie mit Darbietungen eines Joseph Joachim, Pablo Casals, Fritz Wunderlich oder einer Erna Berger vergleicht, vermißt man da nicht etwas? Aber was? Was bedeutet - nachdem wir uns einige Zeit mit der Frage der *Genauigkeit* beim Vergleich zwischen dem „krummen" Kreis und den „geraden" Vielecken beschäftigt haben - „exakt schön"?

In der Musik haben wir es nicht nur mit irgendwelchen exakt erzeugbaren Schallwellen zu tun, vielmehr gründet sich ein großes Werk zuallererst auf eine Idee, die mittels der verschiedensten Intervalle, deren Umkehrungen etc. ausgedrückt und vielleicht besser als „Spiel" mit dem „Vergleichen zwischen Tönen", den „Übergängen zwischen Tönen" und deren Variationen bezeichnet werden könnte. Das Problem ist aber auch hier, daß die höchste Idee des Komponisten zwar in den Noten ausgedrückt ist und durch immer besseres Studieren und Proben darstellbar wird, aber niemals „endgültig genau"; denn wie auch in der Geometrie ist die Erkenntnis durch das rein verstandesmäßige Annähern nicht erreichbar. Aber die Erkenntniskraft des Menschen kann die Idee hinter den Noten „erahnen", wenn er nach Wahrheit strebt.

Ein Musikstück ist deshalb in jedem noch so kleinen Bereich „krumm", oder anders ausgedrückt: Der Übergang von einem Ton zum nächsten kann nicht nur auf so viele Weisen, wie es Menschen gibt, ausgedrückt werden, sondern im Prinzip auf „unendlich" viele verschiedene Weisen.

Bei der Erarbeitung eines Stückes geht es nun darum, aus diesen Möglichkeiten die „wahrste" herauszuarbeiten, die der Idee des Komponisten am nächsten kommt. Vielleicht ist es in der Musik sogar diese „Wahrhaftigkeit", die letztendlich für den Ausdruck und die hörenden Menschen entscheidend ist und deshalb vor der Exaktheit oder Genauigkeit an erster Stelle stehen muß.

Wir wollen jetzt einmal Nikolaus' Gedanken zur Musik betrachten und uns diese nachher an geometrischen Beispielen verdeutlichen:

„Auch in der Musik gibt es nach jener Regel keine Genauigkeit. Kein Ding kommt nämlich mit einem anderen in Gewicht, Länge und Dichte überein; ebensowenig ist es möglich, im genauen Sinne harmonische Verhältnisse zwischen den Tönen von Flöten, Glocken und anderen Instrumenten sowie menschlichen Stimmen zu finden; die Harmonie könnte immer noch genauer bestimmt werden. Auch ist der Grad der wahren Entsprechung bei verschiedenen Instrumenten nicht derselbe, ebensowenig wie bei verschiedenen Menschen; sondern in allem herrscht eine notwendige Verschiedenheit nach Ort, Zeit, Verknüpfung und dergleichen." (*De docta ignorantia*, „Die belehrte Unwissenheit")

Betrachten wir noch einmal das geometrische Beispiel von Nikolaus von Kues: Wir waren vom Dreieck, dem kleinstmöglichen Vieleck, ausgegangen, hatten den In- und Umkreis untersucht und durch Betrachtung einiger umfangsgleicher (d.h. isoperimetrischer) weiterer Vielecke und ihrer In- und Umkreise erkannt, daß der menschliche Geist nur auf dem Wege des beständigen „Vergleichens" dieser unterschiedlichen Verhältnisse letztendlich zum isoperimetrischen Kreis gelangen kann. Dabei mußten wir feststellen, daß wir diesen Kreis zwar geometrisch genau bestimmen können, der Grad dieser Genauigkeit (z.B. in Stellen nach dem Komma für π) immer noch gesteigert werden kann.

Die Verhältnisse zwischen In- und Umkreisen der Vielecke kann man auch mit den musikalischen Intervallen vergleichen. Wir wollen uns einige dieser „Intervalle" betrachten und gehen dabei wiederum vom Dreieck aus: Das Dreieck hatte von allen Vielecken den kleinsten Inkreis und den größten Umkreis. Der Unterschied zwischen Umkreisradius r_3 und Inkreisradius ς_3 ist daher beim Dreieck am größten.

Wie Sie sich erinnern werden, konnten wir noch eine andere interessante Beziehung zwischen Inkreis- und Umkreisradius feststellen, nämlich daß hier ς_3 genau die Hälfte von r_3 beträgt.

Dies können Sie erkennen, wenn Sie wie in *Abbildung 18* aus dem Umkreisradius des Dreiecks im selben Umkreis ein gleichseitiges Sechseck konstruieren und nun eines der sechs kleinen Dreiecke im Sechseck betrachten. Die Mittelsenkrechte dieses Dreiecks teilt nämlich unseren Radius r_3 in zwei Hälften der Länge ς_3 unseres Ausgangsdreiecks. Das Verhältnis $\varsigma_3 : r_3$ ist 1 : 2, was in der Musik einer Oktave entspricht.

Betrachten wir jetzt ein weiteres Vieleck, das Viereck oder Quadrat (siehe *Abbildung 2*):

Hier können wir sofort eine sehr einfache Beziehung zwischen Inkreis- und Umkreisradius erkennen. Der Inkreisradius ς_4 ist offensichtlich halb so lang wie die Viereckseite s_4, und mit dem Satz des Pythagoras erhalten wir

$$r_4^2 = \varsigma_4^2 + (s_4/2)^2$$
$$= 2 \bullet (\varsigma_4/2)^2$$
$$= \varsigma_4^2/2$$

Das heißt: $\varsigma_4^2 = 2 \bullet r_4^2$,

und wir erhalten eine Beziehung von ς_4 zum Umkreisradius r_4 von $\sqrt{2}$, was angenähert einem Verhältnis von 3 : 2 entspricht. Dies ist in der Musik das Intervall der Quinte.

Der geistige Prozeß des ständigen Vergleichens findet also nicht nur in der Geometrie, sondern bei der Benutzung von Intervallen und ihren Umkehrungen auch in der „musikalischen" Geometrie statt. Die „höchste Idee" der Komposition - die bei unserer Suche nach π dem isoperimetrischen Kreis entspricht - wird von der durch den Künstler auf unendlich verschiedene Weise gestaltbaren „Bewegung" zwischen den Noten immer besser und „wahrhafter" ausgedrückt als von einem noch so ausgeklügelten Apparat.

Es ist ganz offensichtlich, daß unser Synthesizer bzw. Computer diese höchste Idee niemals in der gleichen Weise wie ein Mensch darstellen kann, denn ein Computer ist eine Maschine, die auf die eindeutig festgelegte Gestaltungsmöglichkeit ihres Programms eingeschränkt ist. Der Mensch aber vermag diese höchste Idee der Kompositionskraft seines Geistes nicht nur auszudrücken, er vermag sie auch zu *vermitteln.* Die Musik und auch die Geometrie sind nämlich „Möglichkeiten", Ideen zwischen den Menschen von einem Geist zum anderen zu kommunizieren. Der Politiker und Philosoph Lyndon LaRouche schrieb in seiner Schrift *Politik als Kunst*, wenn es den ausführenden Musikern gelingt, in einem Musikstück das auszudrücken, was „zwischen den Noten" steht, und diese Idee des Komponisten und der Musiker „Seele und Geist des Publikums erreicht, dann ist dies nur deshalb möglich, weil zwischen den entsprechenden Aspekten der schöpferischen Erkenntnisprozesse der Beteiligten eine Resonanz besteht."

Die „exakte Schönheit" der Töne einer Maschine dagegen ist eine äußerst statische Angelegenheit. Nikolaus von Kues schrieb über die außerordentliche Fähigkeit des menschlichen Geistes, die Krümmung bis in den kleinsten Be-

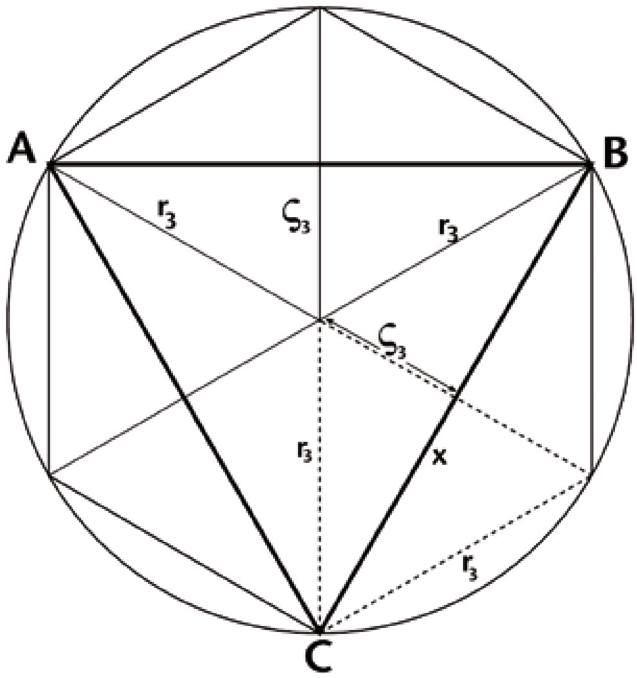


Abbildung 18: *In einem gleichseitigen Dreieck ABC ist der Umkreisradius r_3 doppelt so lang wie der Inkreisradius ς_3. Dies erkennen Sie leicht, wenn Sie aus den Umkreisradien des Dreiecks ein gleichseitiges Sechseck konstruieren: $r3/\varsigma_3 = 2/1$. In der Musik entspricht dieses Verhältnis zweier Saiten der Oktave.*

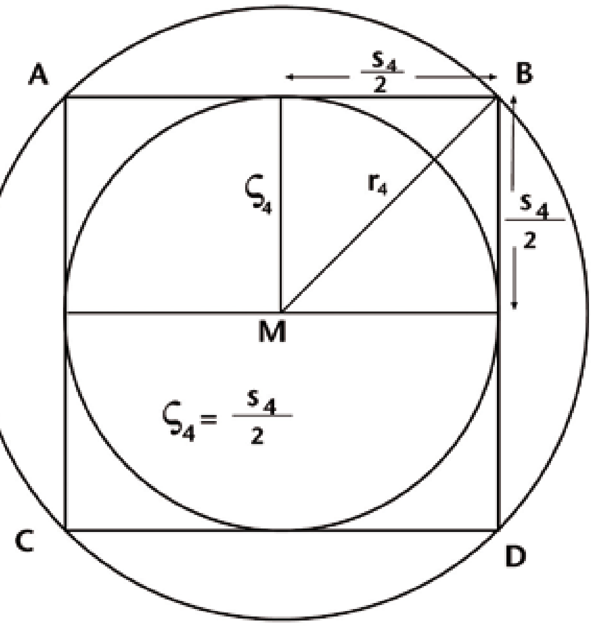


Abbildung 19: *Beim Viereck ist das Verhältnis zwischen Inkreis- und Umkreisradius ungefähr 2:3, welches in der Musik die Quinte darstellt.*

reich erfassen, ausdrücken und dadurch vermitteln zu können:

„...denn die Menschlichkeit (das Menschsein) ist eine Einheit, was bedeutet, daß sie eine Unendlichkeit im Menschen ist. Nun ist es aber das Wesen einer solchen Einheit, Seiendes aus sich zu entfalten, denn sie umschließt in ihrer Einfachheit eine Vielfalt des Seienden... Die Einheit des Menschlichen, verwirklicht im konkreten menschlichen Dasein, scheint das All in der ihr gemäßen Weise einzuschließen. Die Kraft dieser Einheit nimmt es mit dem All auf und zwingt es in die Gewalt des Menschen, so daß nichts seiner Herrschaft entgeht. Denn alles traut er sich, mit den Sinnen oder der Vernunft oder Einsicht zu erfassen. Diese in ihm liegenden Fähigkeiten führen zu einer Selbsteinschätzung, die an alles nach dem Maßstab des Menschlichen herangehen zu können glaubt. Der Mensch ist ein Gott, wenn auch nicht im absoluten Sinne, weil er eben nur Mensch ist; also: ein menschlicher Gott. Der Mensch ist aber auch die Welt, wenn er auch nicht alles konkret sein kann, eben weil er Mensch ist; also ist er ein Mikrokosmos oder eine menschliche Welt...“ (*Über die Vermutungen*)

Violine von Andrea Amati, gebaut ca. 1558/59 in Cremona, Italien, Metropolitan Museum of Art, New York. (J.Ardiles-Arce, Wikimedia Commons/CC 3.0)

Bemerkenswert ist, daß Nikolaus das, was wir heute an Klang- und Ausdrucksmöglichkeiten der Instrumente, an glänzender Virtuosität der Künstler erleben, nicht nur als erster als „Potential“ erkannte, sondern sogar die Grundlagen dazu schuf. Das betrifft vor allem den Instrumentenbau, aber auch die Frage der „Stimmung“.

Zu Nikolaus’ Zeit waren weder die Kreisfunktionen, die sogenannten trigonometrischen Funktionen wie Sinus und Cosinus entwickelt - erste genaue Sinustabellen wurden erst von Regiomontan angelegt, der auch den Cosinus „erfand“ -, noch hatte man genaue Vorstellungen von der „Wohltemperierung“, welche erst Variationen und Modulationen durch alle Tonarten erlaubt.

(siehe zu dem Thema auch die Sonderdrucke: „*Leonardo da Vinci und die Musik*“ und „*Warum ist das Schöne schön?*“)

Letztes Kapitel: Die Konstruktion des isoperimetrischen Kreises

Nikolaus von Kues zeigt mit seinen Untersuchungen, daß der Mensch zwar nicht auf „geradem“ bzw. verstandesmäßigem (oder zahlenmäßig „linearem“) Wege zum Begreifen der Unendlichkeit gelangt, sondern durch ein seinem Geist innewohnendes „lebendiges“ Vermögen des „Vergleichens“.

Was bedeutet dies für die Konstruktion des isoperimetrischen Kreises, wenn man versucht, diese bildlich darzustellen? Die bildliche Darstellung zeigt wiederum, daß der „rechnende“ Verstand niemals genaueste Zahlenwerte erlangt, die Erkenntniskraft ihm aber vorauseilt und die Unendlichkeit erfassen kann.

Betrachten wir nochmals die Zeichnung des Dreiecks mit seinem In- und Umkreis mit dem konkreten Zahlenbeispiel, also einem Umfang von 30 cm. Dann ist eine Dreieckseite 10 cm lang. Am besten konstruieren Sie gleich auch das zum Dreieck umfangsgleiche Viereck (Seitenlänge 7,5 cm) mit seinem In- und Umkreis um den gleichen Mittelpunkt, denn wir werden es später noch brauchen (siehe *Abbildung 20*).

Wir hatten in den letzten Folgen festgestellt, daß die Inkreise der Vielecke mit steigender Seitenzahl immer größer, die Umkreise dagegen immer kleiner werden, und daß sie irgendwo zusammenfallen und eins werden. Die Frage war nur: wo bzw. wann? Der Verstand sagt uns bei diesen Fragen immer: „Das ist nicht genau zu erklären, das kann man nicht begreifen, also sparen wir uns die Mühe...“ Doch der Geist und unsere Erkenntniskraft will es doch versuchen, die Stufe zu immer größerer Einsicht zu erklimmen, immer näher an die letztendliche Wahrheit zu gelangen. Er kann diese letzte Stufe sogar „sehen“.

So ist es heute nach der Entdeckung der Rechnung mit Infinitesimalen durch Leibniz, daß wir den Wert z.B. einer Mathematischen Folge genau angeben und gar nicht mehr darüber nachdenken, daß dies vor den Untersuchungen von Cusa unmöglich war.

Daß wir dies können, zeigt uns die Erforschung der Naturkonstanten, denn dadurch erreichen wir nicht nur einen immer größeren Einblick in Gesetze der Naturprozesse, sondern erfahren auch, welch große Freiheit des Denkens der Mensch sich durch seine eigene Erkenntnis schaffen kann. Die Lösung von Paradoxen gelingt allerdings nur, wenn man das Umfeld dieses Paradoxes immer sorgfältiger untersucht und die dem Problem zugrundeliegende Geometrie erkundet.

Die Ägypter konnten mit ihrer Berechnung von π nur den Rauminhalt ihrer runden Fruchtspeicher berechnen, weil sie sich damit begnügten, das statische Gebilde Kreis zu untersuchen. Archimedes hatte dagegen durch seinen „Annäherungsprozeß“ an den Kreis durch immer vieleckigere Vielecke eine gewisse geometrische Bewegung zur Suche nach größerer Genauigkeit benutzt. Diese Erkenntnisse schufen den Zugang zu den verschiedensten Arten mechanischer Prozesse, welche die Menschen sich beim Bau landwirtschaftlicher und handwerklicher Geräte, von Waffen zur Landesverteidigung, aber auch für die Herstellung astronomischer Instrumente zunutze machen konnten. Das brachte einen erheblichen Fortschritt für die Menschheit.

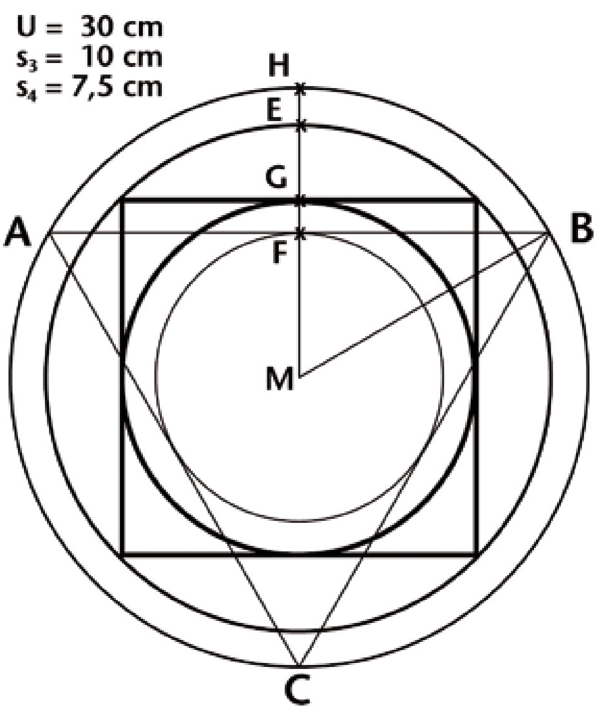


Abbildung 20

Und was brachte die Entdeckung des Nikolaus von Kues? Sie bedeutete eine Revolution für den menschlichen Geist. Das *Unendliche* ist nun greifbar geworden. Archimedes hatte - nachdem er eine Methode konstruiert hatte, wie man riesige Schiffe vom Uferplatz ins Wasser bewegen kann - gegenüber dem in Bewunderung staunenden König Hieron hybristisch erklärt:

„Gib mir einen Standpunkt außerhalb der Erde und ich werde dieselbe in Bewegung setzen!"

Und Nikolaus von Kues zeigte, der Mensch ist ein Gott, zwar ein menschlicher, aber doch ein Gott, was soviel bedeutet wie: Sein Geist ist in einem ständigen schöpferischen Prozeß begriffen, und er kann durch seine wachsende Erkenntniskraft alle Paradoxe des Universums lösen.

Betrachten wir noch einmal den Weg des „Vergleichens" zwischen den In- und Umkreisen, den Nikolaus vorgeschlagen hatte:

„Wir gehen hier von der Überlegung aus, daß Dreieck und Kreis von der Fläche her Extreme bilden. (Die Fläche der Vielecke wird mit steigender Seitenzahl immer größer und erreicht im isoperimetrischen Kreis ein Maximum, C.H.). Im Gegensatz zum Kreis, wo Inkreis und Umkreis zusammenfallen, weichen im Dreieck Inkreis- und Umkreishalbmesser (Radius) am stärksten voneinander ab. Dort ist der Umkreishalbmesser am größten, der Inkreishalbmesser am kleinsten, und ihre Summe ist am kleinsten; umgekehrt ist die Summe im Kreis gleich dem Kreisdurchmesser und am größten. Deshalb wissen wir, daß alle dazwischen liegenden umfangsgleichen regelmäßigen Vielecke entsprechend ihrer Fläche in jenen Strekken sich der Gleichheit mit dem Kreishalbmesser nähern. Wenn also eine Größe bezeichnet wird als Überschuß des Kreishalbmessers über den Inkreishalbmesser im Dreieck, und eine andere Größe, um die der Kreishalbmesser kleiner ist als der Umkreishalbmesser am Dreieck, dann wird sich jedes dazwischenliegende Vieleck entsprechend seiner Fläche im Überschuß seines Inkreishalbmessers über den des Dreiecks und im Unterschied zwischen seinem Umkreishalbmesser und dem des Dreiecks proportional verhalten. Denn da sich jene Größen verändern, weil die Flächen verschieden groß sind, kann ihr Verhältnis kein anderes sein als das Verhältnis der Flächen." (*De Quadratura Circuli*, „Von der Kreisquadratur")

Genauer ausgedrückt heißt dies: Das Verhältnis zwischen dem „Unterschuß" (dem „Weniger") des Vierecks-Umkreisradius unter dem des Dreiecks auf der einen, und dem „Überschuß" des Vierecks-Inkreisradius über den des Dreiecks ist das gleiche wie das Verhältnis zwischen „Unterschuß" von Umkreisradius des Kreises unter dem des Dreiecks zum „Überschuß" des Inkreisradius des Kreises über den des Dreiecks. Da Umkreis- und Inkreisradius beim umfangsgleichen Kreis aber in eins zusammenfallen, können wir diese Verhältnisse folgendermaßen darstellen:

$(r_3 - r_4) : (\varsigma_4 - \varsigma_3)$ ist also das gleiche wie:

$(r_3 - r_{iso}) : (\varsigma_{iso} - \varsigma_3)$,

wobei wir bedenken müssen, daß $r_{iso} = \varsigma_{iso}$ ist.

Wenn wir die Verhältnisse nun nach r_{iso} auflösen - denn wir wollen ja das Verhältnis U/d finden -, erhalten wir für r_{iso}:

$r_{iso} = \varsigma_3 \, (2 \, \varsigma_4 - r_4)$
$\div$
$\varsigma_3 + \varsigma_4 - r_4$

Diese Verhältnisse wollen wir nun in einer Zeichnung darstellen, weil man ihre Bedeutung dann viel klarer erkennen kann. In dieser Zeichnung sollten Sie alle tatsächlichen Längen und Abstände der ersten Abbildung benutzen (siehe *Abbildung 21*):

Wir zeichnen eine vertikale Linie, an deren Fuß wir den Mittelpunkt M unseres Dreiecks und Vierecks (bzw. aller In- und Umkreise) markieren und von M aus nach rechts eine Waagerechte ziehen. Die Waagerechte kann so lang sein, wie Sie wollen. Dann tragen wir oberhalb von M auf der Vertikalen den Punkt F ein, dessen Abstand von M genau die Länge des Dreiecks-Inkreisradius beträgt. Oberhalb von F tragen wir auch den Punkt H ein, der von M aus einen Abstand der Länge des Dreiecks-Umkreisradius hat, so daß der Abstand zwischen F und H genau die Differenz zwischen Umkreis- und Inkreisradius des Dreiecks darstellt.

Von F und H aus ziehen wir nun jeweils parallel zur unteren Waagerechten zwei weitere waagerechte Linien von unbestimmter Länge. Nun betrachten wir das Viereck in unserer ersten Abbildung: Der Abstand MN auf der Waagerechten ist der „Überschuß" des Inkreisradius des Vierecks über den des Dreiecks. Auf dem Punkt N errichten wir nun eine Vertikale parallel zur Strecke MH. Diese Vertikale schneidet die beiden Waagerechten, die von F und H ausgehen. Auf dieser Vertikalen tragen wir nun folgende Punkte ein:

- den Punkt G, wobei der Abstand NG die Länge des Vierecks-Inkreisradius hat,
- und den Punkt E, der von N aus einen Abstand von der Länge des Vierecks-Umkreisradius hat.

Wenn Sie nun die *Abbildung 21* genau betrachten, können Sie erkennen, daß das Stückchen zwischen E und der obersten Waagerechten den „Unterschied" zwischen den Umkreisradien von Dreieck und Viereck ausmacht, das Stückchen zwischen G und der mittleren Waagerechten dagegen den „Überschuß" des Vierecks-Inkreises über den des Dreiecks.

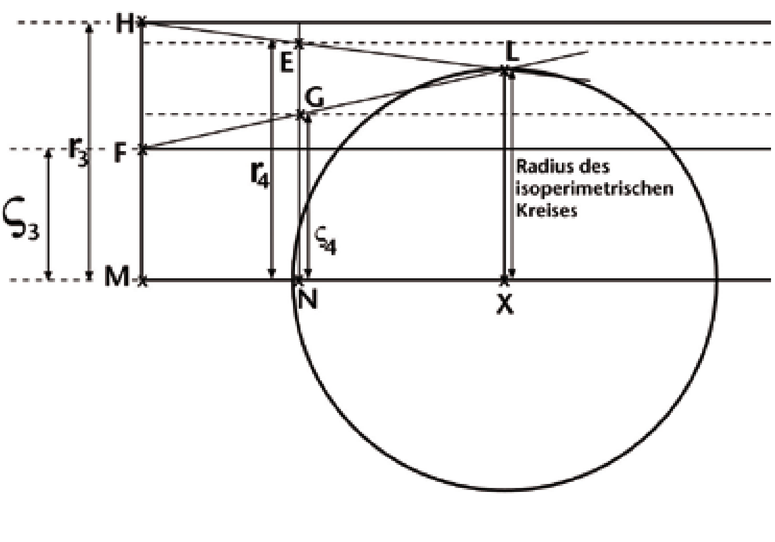
Wenn Sie jetzt von H aus eine Diagonale durch E zeichnen, und eine weitere Diagonale von F durch G, dann werden sich diese beiden Diagonalen irgendwo schneiden, und diesen Punkt wollen wir L nennen. Durch L zeichnen wir nun parallel zu unserer ersten Vertikalen MH eine neue Vertikale und nennen den Punkt, wo sie auf die unterste Waagerechte trifft, X. Der Abstand zwischen X und L aber ist der gesuchte Radius des isoperimetrischen Kreises. In ihm fallen In- und Umkreisradius zusammen.

Diese geometrische Konstruktion des isoperimetrischen Kreises durch Nikolaus ist verblüffend einfach, nicht wahr? Wenn wir hingegen den Zahlenwert für ϖ = U/2r durch Einsetzen unserer eben ermittelten Werte der Inkreis- und Umkreisradien in die Gleichung der Verhältnisse ermitteln wollten, so wäre dies alles sehr viel komplizierter und vor allem... viel ungenauer. Es zeigt sich erneut, der rein zahlenmäßige Verstand kommt im „unendlichen" Prozeß der Wahrheitssuche nie zuende. Selbst wenn Sie einen Taschenrechner mit 20 Stellen hinter dem Komma hätten, würden Sie immer noch nicht die „endgültige" Wahrheit über ϖ gefunden haben...!

Es wäre sicher interessant zu erfahren, wie unsere Vorfahren überhaupt darauf gekommen sind, daß es sich bei dem Verhältnis von Umfang und Durchmesser um eine Konstante handelt. Wir haben jedenfalls gesehen, daß der Mensch sich immer nur durch „Vermutungen" oder Hypothesen der Wahrheit nähern kann - und zwar jeder Mensch in dem ihm von seinem Geist gegebenen möglichen Grade. Dazu sagt Nikolaus von Kues:

„Die verschiedenen Grade der Teilhabe an der Wahrheit ergeben sich also aus der geringeren oder größeren Entfernung der Möglichkeit von ihrer Verwirklichung. Die Annäherung läßt sich aber nie bis zum Erreichen steigern. Und so bleiben die Lehren der Weisen Vermutungen. Die Vermutung ist eine positive Aussage, die an der Wahrheit selbst teilhat, aber in der Weise eines Andersseins. Wie die Sinne an der höheren Einheit der Vernunft erst ihr eigenes Anderssein erfahren und ihre Feststellungen dabei mit der Genauigkeit vergleichen, so daß sie als Vermutungen hervortreten, so stößt auch die Vernunft

Abbildung 21: *Nikolaus' Nikolaus' Konstruktion des isoperimetrischen Kreises. Die beiden Linien von F durch G und von H durch E schneiden sich im Punkt L. MF ist der Inkreisradius, MH der Umkreisradius des Dreiecks. NG ist der Inkreisradius des Vierecks, NE dessen Umkreisradius. Und ganz gleich, in welchem Anstand N von M eingezeichnet wird, für XL ergibt sich immer die gleiche Länge: der Radius des isoperimetrischen Kreises.*



erst im Lichte der Einsicht auf ihr Anderssein und erkennt ihr Zurückbleiben hinter der Genauigkeit als Vermutung. Und schließlich auch die Einsicht selbst, als die der Verwirklichung nächste Möglichkeit, erkennt an der göttlichen Einheit mit Freude, daß ihre Fähigkeit der Vermutung die lichtvollste ist." (*Von den Vermutungen*)

Diese Vermutungen - auch Hypothesen genannt, weil sie jedem Experiment vorangehen -, haben uns geholfen, auf der Suche nach dem universellen „Charakteristikum" des Kreises einige der ihm innewohnenden Geheimnisse ans Licht zu bringen.

Eine interessante statistische Korrelation, die eine gewisse Gesetzmäßigkeit nahelegt, ist etwas anderes als ein echtes Naturgesetz, eine Naturkonstante oder ein allgemeines Charakteristikum unseres Universums. Der Unterschied liegt im Grade ihrer Wahrheit, und dieser Grad ist bei einer Konstanten wie dem Verhältnis zwischen Kreisumfang und Durchmesser „absolut". Man kann auch sagen, ein solches Naturgesetz verrät eine gewisse „Absicht des Schöpfers". Über diese Absicht immer mehr herauszufinden, bleibt der immerwährende Antrieb eines jeglichen Weisen - ob Naturforscher, Philosoph oder Dichter.

Zum Schluß unserer Untersuchung des Paradoxons vom Vergleich zwischen dem „Krummen" und „Geraden" wollen wir auf Max Plancks Äußerung über die Bedeutung der Konstanten zurückkommen. Er selber entdeckte vor mehr als hundert Jahren eine ganz neue Konstante, das nach ihm benannte „Plancksche Wirkungsquantum". Bei aller Verwirrung, die seine Hypothese zur Energiequantelung verursachte, hielt er immer daran fest, daß es etwas absolut Gültiges, eben die Konstanten, im Universum gebe:

„Wenn wir in so zahlreichen Fällen die Wahrnehmung machen, daß große und wichtige Probleme bei der Nachprüfung sich als Scheinprobleme entpuppen, ja daß das Wort ‚Wirklichkeit' manchmal einen ganz verschiedenen Sinn hat, je nachdem der Standpunkt der Betrachtung gewählt wird, kommt dann nicht unsere wissenschaftliche Erkenntnis auf einen flachen Relativismus hinaus? Gibt es denn überhaupt kein gültiges Urteil, keine absolute Wirklichkeit, unabhängig von irgendeinem besonderen Standpunkt? Es wäre schlimm, wenn dem so wäre. Nein, wohl gibt es in der Wissenschaft auch absolut richtige und endgültige Sätze, ebenso wie es in der Ethik absolute Werte gibt, und, was die Hauptsache ist, gerade diese Sätze und diese Werte sind die wichtigsten und erstrebenswertesten von allen... Sie aufzufinden und alle physikalischen und chemischen Vorgänge auf sie zurückzuführen, kann man geradezu als das Endziel der wissenschaftlichen Forschung bezeichnen."